

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por Decreto Presidencial
Del 3 de abril de 1981



LA VERDAD
NOS HARÁ LIBRES

**UNIVERSIDAD
IBEROAMERICANA**

CIUDAD DE MÉXICO ®

**“ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS
COMPLEJOS Y APLICACIONES”**

TESIS

que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Presenta

LUIS ALBERTO QUEZADA TÉLLEZ

Director: Dr. Guillermo Fernández Anaya

Lectores: Dr. Juan Antonio Nido Valencia

Dr. Pablo Padilla Longoria

Dr. Felipe Contreras Alcalá

Dr. Salvador Carrillo Moreno

Ciudad de México, 2016

ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE
LOS SISTEMAS DINÁMICOS
COMPLEJOS Y APLICACIONES

Luis Alberto Quezada Téllez

2016

Índice general

Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Resumen	vii
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.1.1. Sistemas Complejos	1
1.1.2. Sistemas de Tráfico	6
2. Preliminares	8
2.1. Sistemas Complejos	8
2.1.1. Sistemas Autónomos y No Autónomos	8
2.1.2. Espacio Fase	9
2.1.3. Trayectoria	9
2.1.4. Flujo	9
2.1.5. Punto Fijo	10
2.1.6. Linealización	10
2.1.7. Valores y Vectores Propios	12
2.1.8. Mapa de Poincaré	13

2.1.9. Exponentes de Lyapunov	14
2.1.10. Diagrama de Bifurcación	14
2.2. Sistemas de Tráfico	15
2.2.1. El Diagrama Fundamental	15
2.2.2. Caos en modelos tráfico vehicular	18
2.2.3. Intervalos de Comportamiento	19
3. Modelo Complejo de Lü	22
3.1. Modelo Clásico de Lü	22
3.2. Modelo Complejo Extendido de Lü (MCEL6D)	23
3.2.1. Dinámica Hamiltoniana para el MCEL6D	23
3.2.2. Invarianza y Simetría en el MCEL6D	25
3.2.3. Disipación en el MCEL6D	25
3.2.4. Condición Cauchy-Riemann del MCEL6D	26
3.2.5. Equilibrio del MCEL6D	29
3.2.6. Estabilidad del MCEL6D	29
3.2.7. Simulaciones Numéricas MCEL6D	31
3.3. Proyección en 5 dimensiones (MCEL5D)	43
3.3.1. MCEL5D cuando $x_2 = 0$	43
3.3.2. MCEL5D cuando $y_2 = 0$	45
3.3.3. MCEL5D cuando $z_2 = 0$	46
3.3.4. Simulaciones Numéricas MCEL5D	48
3.4. Proyección en 4 dimensiones (MCEL4D)	52
3.4.1. MCEL4D cuando $x_2 = y_2 = 0$	52
3.4.2. MCEL4D cuando $x_2 = z_2 = 0$	53
3.4.3. MCEL4D cuando $y_2 = z_2 = 0$	55
3.4.4. Simulaciones Numéricas MCEL4D	56

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
4. Modelo de Tráfico	61
4.1. Aproximación Polinomial	61
4.2. Análisis de Estabilidad	66
4.3. Comportamiento Dinámico	68
5. Conclusiones	78
I Artículos y Congresos	81

Dedicatoria

A mi amada esposa Adriana Aranda Rodríguez con todo mi cariño (al igual que Roko y Kimberly). A la memoria de mis padres Micaela Téllez Cisneros (✠), Jesús Manuel López Rodríguez (✠), así como a mi abuelita María Luisa Cisneros Manrique (✠), mi tío Ángel Cisneros Manrique (✠) y mi primo Pedro Antonio Téllez Céron (✠). A mi hermano Juan Miguel así como a su familia Quezada Flores (Cecy, Pao, Betsy y Miguelito), a la familia Paredes Téllez (con amor para Tere, Isis, Yoyi y Meñy), al Pbro. Tomás Dorantes Infante, a la familia López Téllez (con amor a mis tíos, los Memes, las Pechochas, Joel y Joyce), a la familia Téllez Céron (con cariño a mi tía Silvia, Lis, Miguel, Camila y el Comandante). A todos mis amigos y en especial a mi gran amigo Armando Pontaza Vázquez.

A mis grandes maestros el Dr. Guillermo Fernández Anaya y el Dr. Salvador Carrillo Moreno.

Agradecimientos

Agradezco a mi hermosa esposa Adriana por darme todo su amor, paciencia y comprensión; hemos alcanzado un triunfo más, porque los dos somos uno y mis logros son suyos. A ella quiero decirle que es una luz en mi camino. Agradezco a mi madre Micaela la vida, su infinito amor, su educación y comprensión. Para mí ella fue una mujer sabia que predicó con el ejemplo, la solidaridad a su familia y sus semejantes, que hicieron de mí el hombre que soy. No tengo palabras con que darle las gracias por todo lo que ella hizo por mí en vida (QEPD). Agradezco a mi hermano Juan Miguel por compartir este sueño. A toda mi familia por su apoyo y cariño, así como a todos mis amigos. Agradezco al Dr. Guillermo Fernández Anaya por creer en mí y por todo lo que me ha brindado. Es mi ejemplo a seguir. Al Dr. Salvador Carrillo por su incondicional apoyo. Agradezco todo su apoyo, conocimiento y comprensión al Dr. Oscar A. Rosas-Jaimes. A mis lectores de tesis: Dr. Felipe Contreras, Dr. Antonio Nido y Dr. Pablo Padilla por sus valiosos comentarios para mejorar mi investigación. Agradezco a la Universidad Iberoamericana A. C. por permitirme ser parte de su hermosa comunidad universitaria. Por su apoyo en la beca de colegiatura para cursar el programa de Doctorado. Agradezco al CONACYT por distinguirme con la beca de manutención para concluir satisfactoriamente mis estudios de posgrado.

Resumen

En este trabajo se propone un Modelo Complejo Extendido de Lü en seis dimensiones (MCEL6D). Este sistema se obtiene de sustituir en las variables reales del Modelo Clásico de Lü variables complejas. Su análisis se extiende a las proyecciones del sistema en cuatro (MCEL4D) y cinco dimensiones (MCEL5D), que incluye el estudio de sus espacio-fase, los valores propios, los exponentes de Lyapunov, sus mapas de Poincaré y sus diagramas de bifurcación de cada uno de los sistemas. Resulta que las proyecciones del sistema en 4D y 5D tienen trayectorias caóticas, mientras que el sistema complejo en 6D muestra comportamientos cuasi-periódicos e hipercaóticos, aunque también tiene características de ser un atractor extraño no caótico (SNA).

También como parte de esta investigación se expone un modelo de tráfico de vehículos en dinámica discreta. Mediante el enfoque conocido como diagrama fundamental de densidad-flujo y utilizando una técnica analítica del polinomio de Lagrange, en el cual se toman los coeficientes de valores significativos que actúan como los parámetros del modelo de tráfico. Estos parámetros del modelo de tráfico pueden producir un número de diferentes trayectorias u órbitas, y es posible representar diferentes situaciones del flujo, incluyendo los caóticos.

Capítulo 1

Introducción

En esta sección se menciona el estado del arte de los sistemas complejos caóticos e hipercaóticos, así como los modelos de sistemas de tráfico.

1.1. Estado del arte

1.1.1. Sistemas Complejos

Los sistemas dinámicos continuos no lineales, como el atractor de Lorenz [1], se han estudiado ampliamente hasta nuestros días. Este tipo de modelos han despertado un gran interés en relación a su comportamiento en el espacio-fase debido a que muestran un comportamiento caótico. En 1999, Chen [2] presentó un sistema autónomo tridimensional simple, que no es difeomorfo con el atractor de Lorenz. Más recientemente, Lü [3] propuso otro atractor tridimensional en un rango de valores para el parámetro k , mostrando un comportamiento caótico de diferentes formas el cual tampoco es difeomorfo al atractor de Lorenz.

Todos estos modelos son conocidos como sistemas de baja dimensión (LD) y se definen como aquellos que tienen uno y medio grados de libertad, lo que

significa que su comportamiento puede ser descrito en un espacio-fase tridimensional [4]. Cuando más de tres variables se tienen en cuenta en modelos similares y relacionando las trayectorias seguidas por esos sistemas dinámicos, es posible obtener hipercaos. Este concepto fue introducido por Rössler [5] en 1979, como una forma superior de caos con al menos dos direcciones hiperbólicas de inestabilidad en el atractor, es decir, dos o más exponentes positivos de Lyapunov.

En contraste con atractores caóticos puros, aquellos con comportamiento hipercaótico han capturado una atención especial debido a la alta complejidad presentada, requiriendo cuatro o más dimensiones para tener representación en el espacio-fase y son llamados sistemas de alta dimensión (HD) [4].

Hay dos métodos para construir sistemas de alta definición de LD sistemas. Un primer método (M1) es extender un sistema de LD mediante la adición de modos de orden superior o nuevos estados. El segundo método (M2) consiste en la adición de grados de libertad mediante el acoplamiento de dos o más sistemas LD [4]. Una manera específica para ampliar el número de variables de estado es por medio de la sustitución de las variables reales por variables complejas. Tales expansiones implican nuevas propiedades y conceptos tales como los atractores extraños no caóticos (SNA), que son considerados como sistemas con un comportamiento que se ubica entre cuasi-periódico y caótico. Una manera de identificar un SNA es mediante la identificación de los signos de sus exponentes de Lyapunov y su combinación, es decir, dado un sistema 4D, si dos de sus exponentes de Lyapunov son cero y los otros dos son negativos, entonces se considera un SNA [6], [7].

Estas estructuras complejas pueden obedecer directamente a representaciones físicas de fenómenos como, por ejemplo, láseres de la física, la convección

térmica, campos eléctricos y polarizaciones atómicas, entre otros [8]. Uno de los primeros enfoques de la idea de las dimensiones en expansión en aquellos modelos clásicos es el modelo complejo de Lorenz, propuesto por Gibbon y McGuinness [9] como una generalización del trabajo seminal de Lorenz. En este tipo de sistema dos de las variables se toman como complejas, dejando el tercer lugar como una real.

Gómez-Mont et al. [10] proponen un modelo similar de Lorenz, con tres variables complejas y dejando sólo los parámetros que aparecen como reales. Su sistema exhibe dos exponentes de Lyapunov positivos, mostrando un comportamiento hipercaótico en \mathbb{R}^5 y analizan las propiedades encontradas para dicho sistema.

En [11] los autores analizan la dinámica celular de un sistema tipo Rayleigh-Bénard en 3D aplicando series de Fourier, obteniendo un conjunto de nueve ecuaciones diferenciales no lineales, de la que es posible observar comportamientos estables, periódicos, cuasi-periódicos o caóticos, dependiendo de cómo cambian los parámetros. Identifican una bifurcación de periodo doble para algún conjunto de valores en los parámetros y se evalúa como característica una principal para calificar el caos en este sistema.

Rech [12] presenta un método numérico para regiones hipercaóticas en un plano de parámetros de un sistema no lineal en 5D. Tal metodología considera los tres exponentes mayores de Lyapunov del sistema para construir un plano que distinga entre los diferentes comportamientos bajo diferentes valores en los parámetros en colores distintos.

Barrio et al. [13] obtiene un sistema de tipo Rössler en 4D que analiza numéricamente. Encuentra comportamiento caótico e hipercaótico en el sistema. También exhibe un componente de ruido cuando se calculan los exponentes, dando una relación directa entre los parámetros y todos estos

posibles comportamientos mediante esta prueba numérica.

En un artículo Wen-Juan et al. [14] analizan los equilibrios locales de un sistema hipercaótico en 4D y mediante el Teorema de la Variedad Central estudia sus bifurcaciones de *Hopf* y *Pichfork*. Este sistema en 4D muestra órbitas periódicas estables, ciclos límite y un atractor como parte de sus posibles comportamientos interesantes.

Otro modelo tipo Lorenz autónomo, continuo e hipercaótico en 4D se analiza en [15], donde se investiga la estabilidad local así como sus bifurcaciones de Hopf y Pitchfork en sus puntos de equilibrio. Demuestran que este sistema no tiene trayectorias homoclínicas y sólo tiene dos órbitas heteroclínicas bajo ciertos valores de los parámetros.

Por otra lado, el acoplamiento entre los sistemas muchas veces se realiza por medio de esquemas de control con retroalimentación. Basado en los sistemas de tipo Lü, Mahmud et al. [16] desarrollan un sistema autónomo y no autónomo complejo hipercaótico, donde el comportamiento hipercaótico es generado mediante un enfoque de realimentación de estado. Las soluciones para dichos sistemas muestran trayectorias que abarcan desde comportamientos periódicos, cuasi-periódicos, caóticos e hipercaóticos. A pesar de que este es un buen conjunto de ejemplos de este tipo de sistemas, hay otros igualmente interesantes en [17].

En otro trabajo, Mahmoud et al. [18] desarrollan un nuevo sistema complejo hipercaóticos de tipo Lü en la cual sus equilibrios se modifican cuando se varían los parámetros. La dinámica de este sistema muestra desde comportamientos periódicos, cuasi-periódicos, caóticos e hipercaóticos. Además, estos autores utilizan control no lineal basado en una función de Lyapunov para realizar sincronización y para regular las trayectorias del sistema de este tipo.

Bao et al. [17] proponen algo similar con un control lineal aplicado a otro sistema de tipo Lü, logrando órbitas dinámicas complejas que pueden generar atractores en 2D o 4D bajo diferentes regulaciones del control. En otro enfoque, Zarei [19] propone un sistema autónomo hipercaóticos en 5D que incluye un esquema de control con ocho parámetros y sólo un punto de equilibrio. La dinámica de este sistema incluye un atractor caótico que genera dos o cuatro *alas* para diferentes conjuntos de parámetros y condiciones iniciales.

El objetivo principal del Capítulo 3 es analizar la dinámica de un sistema complejo extendido de Lü en seis dimensiones (MCEL6D), así como sus proyecciones en cuatro (MCEL4D) y cinco dimensiones (MCEL5D). Basado en un trabajo de Gómez-Mont et al. [10], el presente estudio se extiende a un análisis más detallado del Modelo Complejo Extendido de Lü y al igual que en dicho trabajo, en este caso todos los parámetros del modelo se mantienen fijos, ya que se espera saber si el comportamiento caótico se conserva en este sistema extendido y en sus proyecciones.

A diferencia de otras obras como Mahmoud [8] y Bao [17], el sistema propuesto en el tercer capítulo es un nuevo modelo, una extensión en seis dimensiones basado en el atractor clásico de Lü mediante la sustitución de las variables reales por variables complejas. Además, se ha considerado un sistema hamiltoniano generalizado asociado a la energía de este sistema. Como se ha mencionado, este análisis retoma el trabajo de Gómez-Mont et al. [10], sin embargo en este caso nos estamos centrando en la dinámica del MCEL6D desde un enfoque numérico.

1.1.2. Sistemas de Tráfico

Por otro lado el estudio de sistemas de tráfico vehicular se ha hecho en las últimas décadas utilizando cantidades promedio, que se pueden obtener de muchas diferentes y precisas formas con el fin de analizar diversas ramas de la ingeniería de tráfico [24], [25]. Estas cantidades se relacionan con el bien conocido y denominado *Diagrama Fundamental* [26] [27], que se presenta a menudo como una gráfica de la relación de tráfico flujo-densidad. Dicha representación gráfica, junto con sus expresiones matemáticas, es una idealización de conjuntos de puntos obtenidos a partir de mediciones reales y diferentes expresiones matemáticas que se han propuesto para ajustarlos, reconociendo como buenas aproximaciones que proporcionan suficiente información para el análisis determinista.

En el Capítulo 4 se emplea una técnica de aproximación polinómica [28] para encajar algunos puntos significativos identificados como aquellos valores que son comunes e importantes en cada diagrama fundamental, que constituye un modelo nuevo y adecuado para describir tal relación. Además, modificamos este modelo en una forma discreta, de tal manera que es posible obtener diferentes trayectorias de un esquema iterativo. Esta propuesta surgió con un enfoque similar a la bien conocida ecuación logística, tomada como una relación de tráfico válida [29], pero faltando algunas especificaciones que un diagrama fundamental tiene, lo que resulta en un análisis interesante pero incompleto [36].

Como mostraremos, distintos tipos de situaciones de tráfico pueden ser analizados; abarcan desde los casos de un régimen de flujo libre a las situaciones de flujo congestionado, donde es posible encontrar puntos estables o incluso eventos cíclicos. Hay algunos escenarios, sin embargo, en que parece no existir un patrón en el comportamiento del tráfico. Los valores de tráfico

pueden oscilar pero de manera impredecible y existen algunos casos en los que se dice que el tráfico desarrolla un comportamiento caótico [36].

El modelo polinomial que aquí se presenta permite obtener e ilustrar todos estos comportamientos mediante la modificación de un único parámetro, la velocidad media del tráfico v , que muestra que el tráfico de vehículos es un sistema dinámico no lineal que también produce lo que se conoce como bifurcaciones y trayectorias cuasi-periódicas [30].

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se exponen los preliminares matemáticos que serán útiles en los siguientes capítulos para analizar el sistema complejo de Lü y el modelo complejo de tráfico.

2.1. Sistemas Complejos

2.1.1. Sistemas Autónomos y No Autónomos

En los sistemas dinámicos sus ecuaciones de evolución establecen que la variable temporal t puede o no aparecer en dichas ecuaciones. En base a esto se genera el siguiente criterio de clasificación de los sistemas dinámicos: un sistema se dirá autónomo cuando sus ecuaciones de movimiento contengan implícitamente el tiempo y no autónomo en caso contrario. $\dot{\bar{x}} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x})$ ó $\bar{x}_{t+1} = f(\bar{x}_t)$.

Un sistema dinámico en el cual la variable temporal presente un papel continuo se denomina sistema continuo. Por otra parte, si conocemos el estado del sistema sólo para determinados valores del tiempo, se dice que es un sistema discreto [31].

2.1.2. Espacio Fase

Consideremos un sistema dinámico definido por las variables x_i , $i = 1, \dots, n$. El espacio n -dimensional construido a partir de las variables x_i se denomina espacio-fase del sistema. Decimos entonces que el sistema dinámico tiene dimensión de orden n . Por ejemplo, un sistema dinámico de orden 2 está compuesto por un par de variables, que podemos denotar por x_1, x_2 . El espacio fase del sistema en cuestión es, pues, el plano x_1, x_2 [31].

2.1.3. Trayectoria

La solución de un sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ (o su análogo en forma discreta) de orden n , dadas unas condiciones iniciales, consiste en un conjunto de funciones $x_1(t), \dots, x_n(t)$ que satisfacen el sistema. Dichas funciones constituyen las ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio fase, denominada trayectoria del sistema. El conjunto de trayectorias del sistema del espacio fase para las posibles condiciones iniciales del sistema, se denomina diagrama fase del sistema.

2.1.4. Flujo

Tomemos un sistema dinámico continuo, definido por las variables,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

En el espacio fase, esto es, en el plano (x_1, x_2) podemos definir el campo vectorial dado por:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (2.2)$$

dicho campo vectorial se llama campo de velocidades [31].

La introducción del campo de velocidades nos permite imaginar el espacio fase como un fluido en movimiento, lo que nos permite utilizar una herramienta gráfica para estudiar la evolución de los sistemas dinámicos. De ahí que frecuentemente se hable del flujo de los puntos.

2.1.5. Punto Fijo

Definido un sistema dinámico de orden n en las variables x_1, \dots, x_n , se denominan puntos fijos a los puntos del espacio fase que verifican,

$$x_i = f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.3)$$

para todas las variables [31]. Su análogo en un sistema discreto son tales que, $\bar{x}_t = f(\bar{x}_t)$.

2.1.6. Linealización

Consideremos un sistema dinámico no lineal. A partir de sus ecuaciones, podemos obtener las expresiones de los puntos fijos del sistema. Ahora bien, analizar un sistema no lineal es más complejo que analizar un sistema lineal, para el cual podemos realizar un procedimiento sistemático consistente en hallar los valores y vectores propios de la matriz A . Buscamos, pues, una forma de linealizar el sistema no lineal, para aplicar las mismas técnicas

sistemáticas de análisis. Esbozaremos el procedimiento para un sistema no lineal de segundo orden,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

para el cual un punto fijo viene dado por (x_1^0, x_2^0) , esto es,

$$f_1(x_1^0, x_2^0) = f_2(x_1^0, x_2^0) = 0 \quad (2.5)$$

que constituyen las componentes de una perturbación alrededor del punto fijo. Para estudiar si la perturbación crece o decrece en el tiempo, derivamos respecto de t ,

$$\dot{u} = \dot{x}_1 = f_1(x_1^0 + u, x_2^0 + v) = f_1(x_1^0, x_2^0) + u \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + O(u^2, v^2, uv) \quad (2.6)$$

donde hemos usado el desarrollo de Taylor de la función f_1 . Entonces al ser $f_1(x_1^0, x_2^0) = 0$ por ser un punto fijo,

$$\dot{u} = u \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + O(u^2, v^2, uv) \quad (2.7)$$

y de forma similar

$$\dot{v} = u \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + v \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + O(u^2, v^2, uv) \quad (2.8)$$

Si los términos cuadráticos, englobados en el término $O(u^2, v^2, uv)$ son despreciables frente a los términos lineales, obtenemos el sistema lineal,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(x_1^0, x_2^0)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

que puede ser analizado con los mismos métodos de un sistema lineal. Las condiciones en las cuales los términos de segundo orden pueden ser despreciados dependen de los autovalores de la matriz jacobiana J y serán comentados posteriormente [31].

La linealización también se le conoce bajo el Teorema de Hartman y Grobman. El cual dice que si x es un punto fijo del sistema $\dot{x} = f(x)$ y J es la matriz Jacobiana asociada al sistema cumplen que J tiene valores propios con parte real distinta de cero, entonces las órbitas locales del sistema no lineal en el punto fijo corresponden a orbitas cercanas al origen del sistema lineal asociado a J , es decir, se preserva la estabilidad. Formalmente es el siguiente teorema:

Teorema 2.1 [31] *Si \bar{x} es un punto fijo hiperbólico de $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ entonces tenemos un homeomorfismo h definido en alguna vecindad N de \bar{x} en \mathbb{R}^m , manda órbitas locales del sistema no lineal hacia el sistema lineal. La función h preserva el sentido de las órbitas que también puede ser elegido a fin de preservar la parametrización por el tiempo.*

2.1.7. Valores y Vectores Propios

Sea un sistema dinámico lineal de segundo orden, definido por la ecuación, $\dot{X} = AX$, el rango de A es 2 y su único punto fijo es en el $(0,0)$. Deseamos

hallar soluciones del tipo $x(t) = \exp(\lambda t)v$, siendo $v = (v_1, v_2)$ un vector constante del espacio fásico. Dichas trayectorias corresponden a rectas que pasan por el origen en el espacio fase, tal y como puede comprobarse haciendo,

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{v_2}{v_1} = k \implies x_2 = kx_1 \quad (2.10)$$

lo que nos permitirá realizar un esbozo gráfico del flujo en el plano fase, (x_1, x_2) . Introduciendo la solución buscada en la ecuación del sistema y realizando ciertas manipulaciones algebraicas, obtenemos la ecuación, $(A - \lambda I)v = 0$, donde I es la matriz identidad. La expresión anterior reduce el problema a hallar los valores propios de la matriz A , definidos como aquellos que anulan el polinomio en λ resultante de hallar el determinante $|A - \lambda I|$, que es el polinomio,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \quad (2.11)$$

Una vez hallados los valores propios λ_1, λ_2 que pueden ser iguales o distintos, al introducir cada uno de ellos en la ecuación $(A - \lambda I)v = 0$, obtenemos vectores v_1, v_2 que se denominan vectores propios asociados, respectivamente, a los valores propios o autovalores λ_1, λ_2 [31].

2.1.8. Mapa de Poincaré

El mapa de Poincaré es un gráfico que permite analizar un sistema dinámico. En este mismo mapa uno puede observar si los flujos son caóticos, periódicos o cuasi-periódicos.

Teorema 2.2 [31] *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(E)$. Suponemos que $\phi_t(x_0)$ es una solución periódica de $\dot{x} = f(x)$ de periodo T*

y que el ciclo $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\}$ está contenido en E . Sea Σ un hiperplano ortogonal a Γ en x_0 , es decir, sea $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}$. Entonces existe una $\delta > 0$ y una única función $\tau(x_0)$, definida y continuamente diferenciable para $x \in N_\delta(x_0)$ de tal manera que $\tau(x_0) = T$ y $\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$ para todo $x \in N_\delta(x_0)$.

2.1.9. Exponentes de Lyapunov

La dependencia exponencial de las condiciones iniciales significa que si tomamos dos puntos iniciales que están separados uno de otro a una pequeña distancia d_0 en t_0 , después que va creciendo el tiempo t las trayectorias empiezan a diverger exponencialmente. La dependencia de la distancia d entre dos trayectorias al tiempo t , así como su separación inicial d_0 en $t = t_0$, la función exponencial está dada por $d(t) = d_0(t_0)e^{\lambda t}$.

El exponente denotado por λ es un indicador de la sensibilidad a pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales, lo que es referido al exponente de Lyapunov, que puede ser expresado como $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d}{d_0}$ [31].

2.1.10. Diagrama de Bifurcación

Consideremos una familia de sistemas $X' = F_a(X)$ donde a es un parámetro real. Si asumimos que F_a depende de a en una manera C^∞ . Una bifurcación ocurre cuando existe un cambio significativo en la estructura de las soluciones del sistema cuando a varía. Los tipos más simples de bifurcaciones ocurren cuando el número de soluciones de equilibrio cambia conforme a varía [31].

2.2. Sistemas de Tráfico

2.2.1. El Diagrama Fundamental

Un enfoque macroscópico del tráfico vehicular se centra en las variables agregadas, como velocidades promedio, flujos y densidades vehiculares. En este caso, la velocidad v se conoce como la velocidad de los vehículos de enfrente, a menudo considerado como la velocidad máxima alcanzada por el movimiento del coche promedio en un flujo libre, la situación de no congestión. De la figura 2.1, es posible observar que esta cantidad está muy cerca del valor a la línea tangente de la mayoría de los valores en la parte ascendente a la curva, pero esta característica cambia cuando el flujo se aproxima a su valor máximo $q_{\text{máx}}$.

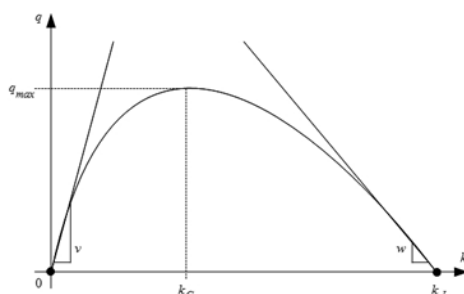


Fig. 2.1 Densidad-Flujo (q vs k).

Diagrama Fundamental Clásico.

La congestión aparece, y puede ser más valioso saber la velocidad del frente hacia atrás de la congestión w , una cantidad que mide la onda de frente como se mueve en la dirección opuesta al flujo de tráfico, estrechamente relacionado con la parte descendente de la curva de Daganzo [26]. El flujo q es una cantidad relacionada con un conjunto de vehículos que se mueven con

el tiempo. Puede ser un número de vehículos que pasan por un punto en un intervalo de tiempo o un conjunto de coches que atraviesa una sección dentro de un intervalo de tiempo [24], [26].

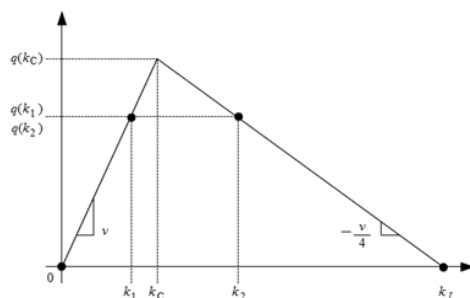


Fig. 2.2 Simplificación del
Diagrama Fundamental
Densidad-Flujo Normalizado.

La densidad k se define como el número de vehículos que ocupan una sección de un carril o tramo de una carretera. Una medida directa de la densidad se puede obtener con las fotografías aéreas, imágenes de video o las observaciones *in situ*, es decir, la limitación de la longitud de un camino y contar los vehículos presentes en ella en un momento de tiempo [26], [32].

Estas tres cantidades se relacionan de manera simplista a través de $q = Q(k, v)$ y se representan en la Fig. 2.1. La forma de esta curva es más bien descriptiva e idealizada. Depende de los casos particulares de las carreteras y sus condiciones. Es una función completa y continua, pero encontrar toda la gama de valores para cada variable experimental no es muy probable. Los datos obtenidos en la vida real tienen múltiples discontinuidades, en la que muchas partes de esta curva no están presentes [33].

Esta curva ilustra varios puntos importantes. Tenga en cuenta que el flujo nulo se produce en dos condiciones diferentes:

1) Cuando no hay coches en la carretera, la densidad y el flujo son cero. La velocidad será la del primer piloto que aparece, en general, un valor alto. Esta velocidad se representa en el diagrama fundamental como la pendiente v de una línea recta que pasa por el origen, conocida como la velocidad de flujo libre.

2) Cuando la densidad se vuelve tan alta que todos los vehículos se ven obligados a detener, el flujo es cero de nuevo, ya que no hay movimiento. La densidad en esta situación se conoce como densidad de congestión y que se denomina por k_J .

Entre estos dos extremos hay muchas condiciones del flujo vehicular. Como incrementos de densidad desde cero, el flujo hace lo mismo, ya que hay más coches en la carretera, pero ya que esto va a disminuir la velocidad, debido a las crecientes interacciones entre vehículos. Esta disminución en la velocidad es imperceptible cuando las densidades y los flujos son bajos o incluso medio, pero aumenta notablemente la densidad q y el flujo k alejándose del comportamiento lineal.

La caída de la velocidad es notable antes de que el flujo alcanza su valor máximo. Esta condición se muestra en la Fig. 2.1 en un punto donde se encuentran la densidad crítica k_C y el flujo máximo $q_{\text{máx}}$. Después, la velocidad y el flujo disminuyen, mientras que aumenta la densidad y comienzan las situaciones de estados congestionados en el diagrama fundamental.

Otra punto importante relacionado a esta curva visible, es el que corresponde directamente a la velocidad del frente hacia atrás de la congestión w , y se asocia con una línea recta trazada desde el punto k_J densidad de atasco como se ilustra en la Fig. 2.1. Como se puede observar, cualquier flujo, excepto por el valor más alto, puede ocurrir en dos condiciones diferentes, una con baja densidad y otra con alta densidad.

2.2.2. Caos en modelos tráfico vehicular

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Dado que el contradominio y el dominio de f son en el mismo espacio, podemos definir nuevas funciones a partir de la composición de f consigo misma: f^0 será la función identidad, $f^0 = id : X \rightarrow X$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f, \dots, f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$. Llamaremos a estas funciones las iteradas de f . Las siguientes dos propiedades son inmediatas: Si $n, m \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} representa al conjunto de los números enteros positivos) entonces $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ y $(f^n)^m = f^{mn}$. Dado un punto $x \in X$ la siguiente sucesión será la órbita de x bajo f

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\} = o(x, f) \quad (2.12)$$

Definición 2.3 [30] Sea $f : X \rightarrow X$. Decimos que x es un punto periódico de f o tiene una órbita periódica bajo f , si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al menos de estos números le llamamos el periodo de x . Si $f(x) = x$, decimos que x es un punto fijo (además de ser un punto periódico de periodo 1). Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos así: $Per(f)$.

La definición de caos en el sentido de Devaney [30] es,

Definición 2.4 [30] Sea $f : X \rightarrow X$. Decimos que f es caótica en X si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- i) El conjunto de puntos periódicos de f forma un conjunto denso en X .
- ii) f es transitiva en X .
- iii) f es sensible a las condiciones iniciales en X .

2.2.3. Intervalos de Comportamiento

Definición 2.5 [30], [36]. Si Q es una función de una manera tal que $Q(k^*) = k^*$, entonces k^* es un punto fijo de Q .

Definición 2.6 Un punto k es conocido como un punto periódico [30], [36] de la función Q con período m si $Q^m(k) = k$, es decir, k es un punto periódico de Q con período m si k es un punto fijo de Q^m . El punto k tiene un primer período m_0 si $Q^{m_0}(k) = k$ y $Q^n(k) \neq k$ siempre $0 < n < m_0$, es decir, k tiene primer período m_0 si k regresa de nuevo a un punto anterior por primera vez después de m_0 iteraciones de Q . El conjunto de todas las iteraciones de k se llama la órbita de k y si k es un punto periódico entonces el conjunto de sus iteraciones se llama una órbita periódica o un ciclo.

Definición 2.7 Sea Q una función y un punto periódico p de Q con un primer período m . Entonces k es asintótica a p si hay una secuencia de $k, Q^m(k), Q^{2m}(k), Q^{3m}(k), \dots$ que converge a p , es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^{nm}(k) = p$. El conjunto estable de p , denotado por $\Omega_s(p)$, incluye todos los puntos que son asintóticos a p [30], [36].

Teorema 2.8 Sea Q una función continua y derivable y sea p un punto fijo de Q . A continuación, el valor absoluto de la derivada de Q en p , $|Q'(p)| < 1$ implica que existe una vecindad alrededor de p , que esta contenida en $\Omega_s(p)$ y $|Q'(p)| > 1$ implica que existe una vecindad alrededor de p cuyos puntos hacen que los valores de Q divergan bajo la iteración. La demostración de este teorema se puede encontrar en la referencia [36].

Definición 2.9 Sea p un punto periódico de Q de primer período m . Si $|(Q^m)'(p)| < 1$, entonces p es un punto periódico atractor de Q . Si $|(Q^m)'(p)| > 1$, entonces p es un punto periódico repulsor de Q [30], [36].

Definición 2.10 [39] La solución cero de la ecuación (4.9) se dice que es exponencialmente estable si $M \geq 0$ y $\beta \in [0, 1]$, tal que $\forall \alpha, \alpha_0 \in \mathbb{Z}_+, \alpha \geq \alpha_0$; $\forall k^* \in \mathbb{R}^n : \|Q(\alpha, \alpha_0, k^*)\| \leq M\beta^{\alpha-\alpha_0} \|k^*\|$.

Teorema 2.11 Cada punto fijo k^* del polinomio (4.9) es exponencialmente estable.

Demostración. Considera el polinomio Q de la ecuación (4.9) y considera su forma derivada,

$$Q' = \left(\frac{60}{13}k_i^2 - \frac{159}{26}k_i + \frac{79}{52} \right)v \quad (2.13)$$

Si k^* es un punto fijo y si $|Q(k^*)| < 1$ entonces,

$$\lim_{k \rightarrow k^*} \left| \frac{Q(k) - Q(k^*)}{k - k^*} \right| < 1 \quad (2.14)$$

Para un punto fijo $Q(k^*) = k^*$

$$\lim_{k \rightarrow k^*} \left| \frac{Q(k) - k^*}{k - k^*} \right| < 1 \quad (2.15)$$

Debido a que el polinomio $Q(k, v)$ es continua y su derivada en k^* existe, entonces,

$$\lim_{k \rightarrow k^*} \left| \frac{Q(k) - k^*}{k - k^*} \right| < M\beta^{\alpha-\alpha_0} k^* < 1$$

Hay una $\delta > 0$ tal que $k \in (k^* - \delta, k^* + \delta) \cap [0, 1]$ y por lo tanto,

$$\left| \frac{Q(k) - k^*}{k - k^*} \right| < M\beta^{\alpha-\alpha_0} k^* < C < 1$$

Así

$$|Q(k) - k^*| < C |k - k^*| \quad (2.16)$$

Como la distancia de k a k^* es menor que δ , es decir, $|Q(k) - k^*| < \delta$, entonces

$$Q((k^* - \delta, k^* + \delta) \cap [0, 1]) \subset (k^* - \delta, k^* + \delta) \cap [0, 1] \quad (2.17)$$

Esto se puede extender a cualquier número de iteración $n \in \mathbb{N}$

$$|Q_n(k) - k^*| < C^n |k - k^*|$$

Por lo tanto, $\forall k \in (k^* - \delta, k^* + \delta) \cap [0, 1]$, el polinomio iterativo $Q_n(k)$ es exponencialmente estable y entonces $Q_n(k) \rightarrow k^*$. ■

Capítulo 3

Modelo Complejo de Lü

En el presente capítulo se analiza la dinámica del MCEL6D así como sus proyecciones en cinco (MCEL5D) y en cuatro (MCEL4D) dimensiones.

3.1. Modelo Clásico de Lü

En el 2002, se publicó el atractor caótico de Lü [3]. Éste consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas tridimensionales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + ky \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{3.1}$$

Lü desarrolló toda una serie de análisis para cubrir todos los comportamientos que este sistema muestra cuando cambian los valores de sus parámetros. Cuando estos parámetros son $a = 36$, $b = 3$ y $12,7 < k < 29,345$, sus trayectorias son caóticas.

3.2. Modelo Complejo Extendido de Lü (MCEL6D)

A partir del modelo clásico de Lü, se propone un nuevo modelo autónomo no lineal.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= ay_1 - ax_1 \\
 \dot{y}_1 &= ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2 \\
 \dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1 - x_2y_2 \\
 \dot{x}_2 &= ay_2 - ax_2 \\
 \dot{y}_2 &= ky_2 - x_1z_2 + x_2z_1 \\
 \dot{z}_2 &= -bz_2 + x_1y_2 + x_2y_1
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si las variables x, y y z son sustituidas por variables complejas $x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2$ y $z = z_1 + iz_2$ el modelo original se modifica en una versión extendida que está descrita por un sistema de seis ecuaciones, donde las variables x_1, y_1 y z_1 son la parte real, mientras que las variables x_2, y_2 y z_2 son la parte imaginaria del sistema (3.2).

Como se verá en las siguientes subsecciones, este sistema cumple con algunas útiles propiedades de manera similar a otros modelos como el de Lorenz, Chu y obviamente Lü.

3.2.1. Dinámica Hamiltoniana para el MCEL6D

En la siguiente subsección se propone un hamiltoniano generalizado del MCEL6D. Como se mencionó anteriormente, el modelo es una extensión natural de los resultados obtenidos en [20], donde se describen diferentes sistemas hamiltonianos, a pesar de que en el presente caso se ha omitido el término r y sólo se tiene en cuenta la energía cinética de nuestro modelo. Si

consideramos un sistema no lineal suave dado en la siguiente forma canónica del *Hamiltoniano Generalizado* [20],

$$\dot{x} = \hat{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x} + \hat{S}(x) \frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

donde $H(x)$ denota una función de energía suave que es globalmente positiva definida en \mathbb{R}^n . La columna del vector gradiente de H denotada por $\frac{\partial H}{\partial x}$ se asumen que existe en todos lados. Frecuentemente usamos la función de energía cuadrática de la forma,

$$H(x) = \frac{1}{2} x^T M(x) \quad (3.4)$$

donde M una matriz de constantes, simétrica y definida positiva. Las matrices cuadradas $\hat{J}(x)$ y $\hat{S}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfacen las siguientes propiedades que muestran la estructura de energía del sistema,

$$\hat{J}(x) + \hat{J}(x)^T = 0, \quad \hat{S}(x) = \hat{S}(x)^T \quad (3.5)$$

El campo vectorial $\hat{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x}$ exhibe la parte conservativa del sistema y también se le conoce como la parte sin trabajo o la pérdida de la fuerza de trabajo del sistema. La matriz $\hat{S}(x)$ es, en general, una matriz simétrica que representa el trabajo o la parte no conservativa del sistema. Para ciertos sistemas, la matriz simétrica $\hat{S}(x)$ es negativa definida o negativa semidefinida [20].

Por lo tanto el sistema puede escribirse de la forma hamiltoniana generalizada, tomando como función de energía hamiltoniana la función escalar,

$$H(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \frac{1}{a} x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \right] \quad (3.6)$$

Esto produce, de acuerdo con el procedimiento anterior

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{2} & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{2} \\ y_1 \\ z_1 \\ \frac{x_2}{2} \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{2} & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{2} \\ y_1 \\ z_1 \\ \frac{x_2}{2} \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2.2. Invarianza y Simetría en el MCEL6D

Es fácil demostrar que una transformación de coordenadas es de la forma

$$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \rightarrow (-x_1, -y_1, z_1, -x_2, -y_2, z_2) \tag{3.8}$$

lleva a que el sistema (3.2) sea invariante. Por otro lado, la misma transformación permite observar que las trayectorias desarrolladas por (3.2) presenten simetría respecto a los ejes z_1 y z_2 . Estas propiedades también están presentes en los modelos clásicos de Lorenz, Chen y Lü.

3.2.3. Disipación en el MCEL6D

Un gran número de sistemas caóticos son disipativos. Estos sistemas cumplen la condición de convergencia

$$\nabla V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} < 0 \quad (3.9)$$

Para el sistema (3.2) esto se expresa por medio de

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4} + \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_5} + \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_6} \quad (3.10)$$

Realizando estas operaciones y haciendo sustituciones apropiadas tenemos

$$\nabla V = -a + k - b - a + k - b = -2a + 2k - 2b < 0 \quad (3.11)$$

De (3.11) se puede ver que $k < a + b$, y por lo tanto el sistema (3.2) es disipativo para ese rango de valores de k , en función de las cantidades a y b . Esto significa que las trayectorias asintóticas se asientan sobre el atractor. También significa que cada volumen que contiene el sistema de movimiento se desvanece a cero cuando el tiempo incrementa exponencialmente. Es decir,

$$\frac{dV}{dt} = e^{2(k-a-b)} = e^w \quad (3.12)$$

Esto implica que el volumen del atractor disminuye por un factor de e^w , y para cada momento en particular t el volumen es:

$$V(t) = V_0 e^{wt} \quad (3.13)$$

3.2.4. Condición Cauchy-Riemann del MCEL6D

Con el fin de conocer si un sistema dinámico es holomorfo, es necesario comprobar si este sistema satisface la condición de Cauchy-Riemann. Necesitamos las siguientes definiciones y un teorema clásico. Ahora consideramos

una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ en un conjunto abierto $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$, es decir, en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 3.1 [21] Decimos que f es diferenciable en el punto $z_0 \in \Omega$ si el límite $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe. En este caso, el número $f'(z_0)$ es denominado la derivada de f en z_0 .

Definición 3.2 [21] Cuando f es diferenciable en todos los puntos de Ω decimos que f es holomorfa en Ω .

Teorema 3.3 [21] Si f es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ en (x_0, y_0) . Además, la derivada de f en z_0 está dada por $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$.

En vista de los anterior, en el caso del MCEL6D tenemos que $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ una vecindad en el origen en \mathbb{C}^n , con $i = \sqrt{-1}$. Entonces,

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \quad z(t_0) = z_0 \in \mathbb{C}^n \quad (3.14)$$

donde $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))^T$, $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, $z_\alpha \in \mathbb{C}$, $f_\alpha(z) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\alpha = 1, \dots, n$, $f(z_e) = 0$. Sustituyendo $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ donde $f_\alpha(z) = u_\alpha(x, y) + iv_\alpha(x, y)$, sistema (3.14) puede ser reexpresado de la siguiente forma con funciones reales de variables reales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(x, y) \\ \dot{y} &= v(x, y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ y $v = (v_1, \dots, v_n)^T$.

Esta expresión para $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tiene una estructura precisa:

$$u(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \begin{bmatrix} ay_1 - ax_1 \\ ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2 \\ -bz_1 + x_1y_1 - x_2y_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.16)$$

$$v(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \begin{bmatrix} ay_2 - ax_2 \\ ky_2 - x_1z_2 + x_2z_1 \\ -bz_2 + x_1y_2 + x_2y_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.17)$$

las cuales son funciones diferenciables en \mathbb{C}^3 . Para verificar que la condición Cauchy-Riemann se satisface, es fácil ver que,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_2} \quad (3.17a)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_1} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_2} \quad (3.17b)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_1} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial z_2} \quad (3.17c)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_2} = -\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_1} \quad (3.17d)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_2} = -\frac{\partial v_\alpha}{\partial y_1} \quad (3.17e)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_2} = -\frac{\partial v_\alpha}{\partial z_1} \quad (3.17f)$$

para $\alpha = 1, 2, 3$. Por lo tanto el sistema es holomorfo (ver [21] y [22]).

3.2.5. Equilibrio del MCEL6D

Para calcular el equilibrio del sistema (3.2), se considera el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 ay_1 - ax_1 &= 0 & (3.18) \\
 ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2 &= 0 \\
 -bz_1 + x_1y_1 - x_2y_2 &= 0 \\
 ay_2 - ax_2 &= 0 \\
 ky_2 - x_1z_2 + x_2z_1 &= 0 \\
 -bz_2 + x_1y_2 + x_2y_1 &= 0
 \end{aligned}$$

donde $a = 36, b = 3$ y $k = 14,5$. Estos parámetros se mantendrán fijos a lo largo de esta investigación. Resolviendo algebraicamente las ecuaciones (3.18) se tienen cinco puntos de equilibrio: E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 descritos por la Tabla 1.

Tabla 1. Puntos Equilibrio MCEL6D

	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2
E_1	0	0	0	0	0	0
E_2	-6.59	-6,59	14.5	0	0	0
E_3	6.59	6.59	14.5	0	0	0
E_4	0	0	14.5	-6.59	-6.59	0
E_5	0	0	14.5	6.59	6.59	0

3.2.6. Estabilidad del MCEL6D

El homomorfismo entre los valores complejos (3.14) y aquellos valores reales (3.15) del sistema lleva a usar los métodos existentes para analizar la

estabilidad. De esta manera el sistema (3.15) puede ser linealizado cerca de su punto de equilibrio $z_e = x_e + iy_e$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(x_e, y_e) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

donde

$$J(x_e, y_e) = \left[\frac{\partial(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)} \right]_{(x_e, y_e)} \quad (3.20)$$

es la matriz jacobiana de $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ evaluada en $z_e = x_e + iy_e$. Por lo tanto, para determinar la estabilidad local de un sistema no lineal del tipo (3.2) es posible centrarse sobre los eigenvalores de la matriz Jacobiana relacionada al sistema, de la misma manera valuada como en los sistemas reales [22].

Para el presente caso, la matriz Jacobiana del sistema (3.2) está definida por la expresión siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

evaluando en (3.20) se tiene,

$$J_{E_i} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_1 & k & -x_1 & z_2 & 0 & x_2 \\ y_1 & x_1 & -b & -y_2 & -x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & a & 0 \\ -z_2 & 0 & -x_2 & -z_1 & k & -x_1 \\ y_2 & x_2 & 0 & y_1 & x_1 & -b \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Los eigenvalores de (3.22) se muestran en la Tabla 2, donde se puede observar que sus cinco puntos de equilibrio son hiperbólicos. También hay que notar que el origen y los cuatros puntos de equilibrio restantes son puntos foco-silla.

Tabla 2. Eigenvalores del MCEL6D

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E_1	2.5+12.5i	2.5-12.5i	-36	9.4	-3	-14.6
E_2	-5.2+19.3i	-5.2-19.3i	0.1-9.6i	0.1+9.6i	-42.8	6.1
E_3	-2.2-8.4i	-2.2+8.4i	-31.8+11i	-31.8-11i	-7.3	15.4
E_4	8.1+2.8i	-8.9+6.4i	-37.4-3.5i	-17.2-0.9i	0.1+13.4i	1.8-11.6i
E_5	8.1-2.8i	-8.9-6.4i	-37.4+3.5i	-17.2+0.9i	0.1-13.4i	1.8+11.6i

3.2.7. Simulaciones Numéricas MCEL6D

Se utilizó el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden para calcular las trayectorias del sistema (3.2). Este mismo método también se utiliza en todos los cálculos numéricos en este trabajo.

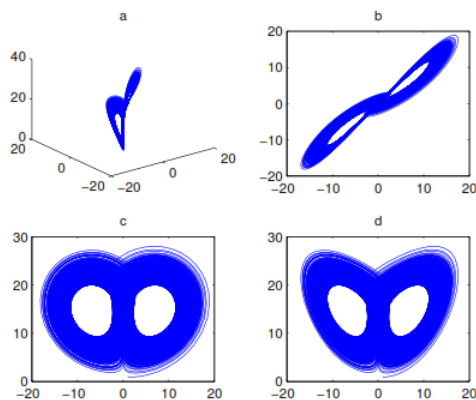


Fig. 3.1 MCEL6D con la condición inicial de $(1,1,1,0,0,0)$. a) Espacio fase, b) plano XY, c) plano XZ y d) plano YZ.

Para calcular los exponentes de Lyapunov, el algoritmo utilizado es el propuesto por Wolf et al. [23]. Los valores apropiados del tiempo del transitorio es igual a 3×10^5 y el tiempo de integración de 1.5×10^4 con el fin de obtener un resultado confiable en el cálculo de los exponentes de Lyapunov [13]. Las figuras del 3.1 a 3.5 representan retratos en el espacio-fase para el sistema 6DECLM para diferentes condiciones iniciales.

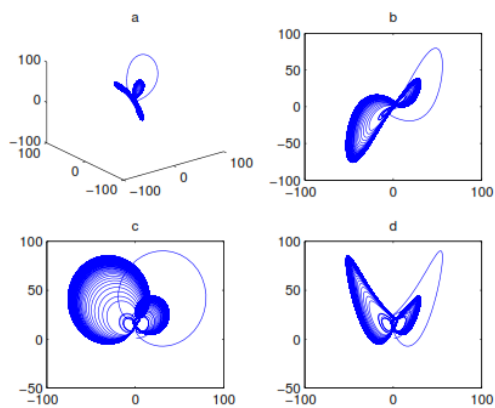


Fig. 3.2 MCEL6D con la condición inicial de $(1,1,1,0.5,0.5,0.5)$. a) Espacio fase, b) plano XY, c) plano XZ y d) plano YZ.

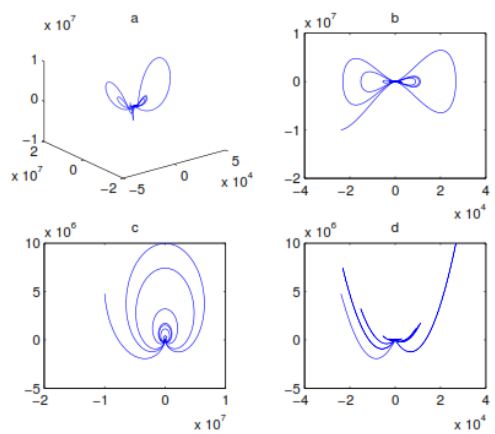


Fig. 3.3 MCEL6D con la condición inicial de $(1,1,1,1,1,1)$. a) Espacio fase, b) plano XY, c) plano XZ y d) plano YZ.

En la figura 3.1 se muestra el comportamiento hipercaótico conseguido mediante la condición de valores positivos o negativos en las variables reales y en las variables imaginarias tomando valores de cero. Se observa esta misma dinámica, si tomamos los valores de punto de equilibrio como condiciones iniciales. Se observa que el rango de valores en el espacio-fase aumenta a medida que las condiciones complejas toman valores reales que están más alejadas del origen, distorcionando el atractor clásico de Lü en una forma que hemos denominado las "*alas de Lü*".

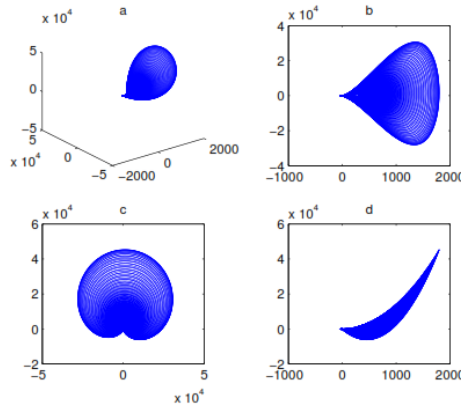


Fig. 3.4 MCEL6D con la condición inicial de $(1,1,1,2,2,2)$. a) Espacio fase, b) plano XY, c) plano XZ y d) plano YZ.

Los exponentes de Lyapunov calculados bajo la siguiente condición inicial $(1,1,1,0,0,0)$ son: $L_1 = 0.6, L_2 = 0, L_3 = -24.9, L_4 = 0.6, L_5 = 0$ y $L_6 = -24.9$. Este conjunto de exponentes de Lyapunov dan un carácter hipercaótico al sistema (ver Fig. 3.6). Si la condición inicial cambia a $(1,1,1,0.5,0.5,0.5)$ otras trayectorias aparecen (Fig. 3.2). En este caso, la parte compleja toma valores positivos cercanos al origen.

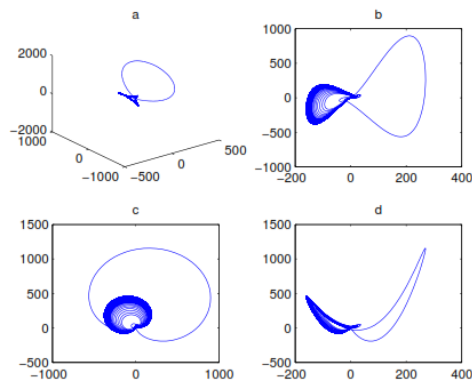


Fig. 3.5 MCEL6D con la condición inicial de $(0,0,0,1,1,1)$. a) Espacio fase, b) plano XY, c) plano XZ y d) plano YZ.

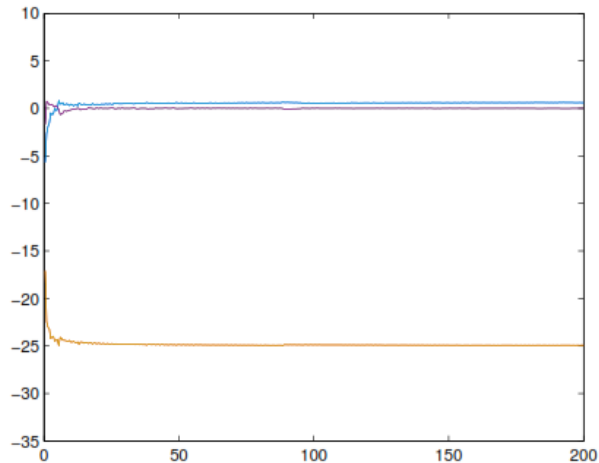


Fig. 3.6 Exponentes Lyapunov MCEL6D para una condición inicial $(1,1,1,0,0,0)$.

El atractor comienza a distorsionarse, el sistema (3.2) tiene un comportamiento cuasi-periódico y sus exponentes de Lyapunov son: $L_1 = 0, L_2 =$

$0, L_3 = -24.9, L_4 = 0, L_5 = 0$ y $L_6 = -24.9$ (ver Fig. 3.7). Las figuras 3.3 y 3.4 tienen valores positivos en sus partes reales e imaginarias. Ambas tienen un comportamiento cuasi-periódico. Diferentes aspectos surgen de condiciones iniciales distintas: $(1,1,1,1,1,1)$ y $(1,1,1,2,2,2)$ respectivamente.

Los exponentes de Lyapunov para estos casos son $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = -24.9, L_4 = 0, L_5 = 0$ y $L_6 = -24.9$ (ver Fig. 3.8) y para el segundo caso son: $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = -24.4, L_4 = 0, L_5 = 0$ y $L_6 = -24.4$ (ver Fig. 2.9). Si tomamos la condición inicial $(0,0,0,1,1,1)$ las trayectorias se muestran en la figura 3.5. Nótese que para este caso se toman valores cero en la parte real y valores unitarios en el conjunto de variables imaginarias. En la figura 3.10 sus exponentes de Lyapunov son: $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = -24.4, L_4 = 0, L_5 = 0$ y $L_6 = -24.4$.

Una manera alternativa de visualizar las trayectorias del MCEL6D, se presentan en las figuras 3.11 y 3.12. Como se puede observar en estas figuras, se muestran sus trayectorias cuasi-periódicas.

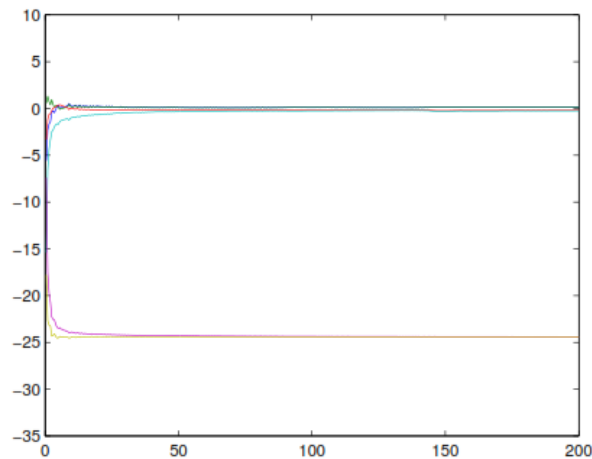


Fig. 3.7 Exponentes Lyapunov MCEL6D para una condición inicial $(1,1,1,0.5,0.5,0.5)$.

Para estas figuras se tomaron 200 condiciones iniciales aleatorias, 56 de ellas no fueron capaces de pasar del estado transitorio. A continuación, las figuras 3.11 y 3.12 son el resultado de sólo 144 condiciones iniciales de las trayectorias periódicas de la parte real e imaginaria del sistema que lograron pasar el transitorio. La figura 3.11, que hemos llamado "*alas Lü*", se muestran simultáneamente todas las trayectorias obtenidos por simulaciones de 144 condiciones iniciales distintas y generados al azar, teniendo sólo las variables reales del 6DECLM, es decir, sólo x_1, y_1 y z_1 tomado sólo el plano $X_1 - Z_1$.

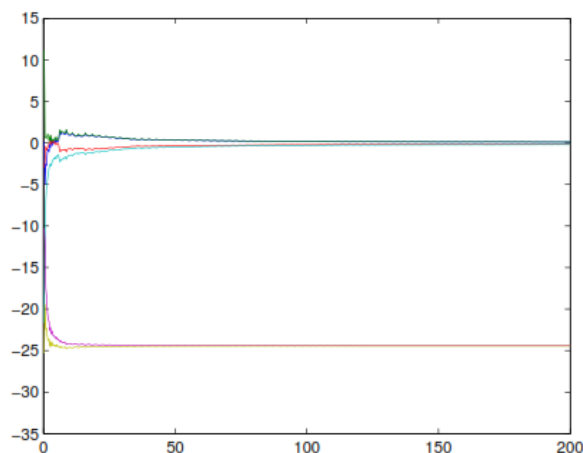


Fig. 3.8 Exponentes Lyapunov MCEL6D para una condición inicial $(1,1,1,1,1,1)$.

La figura 3.12 es analógica a la 3.11 donde se muestran simultáneamente todas las trayectorias obtenidos por simulaciones de 144 condiciones iniciales distintas y generados al azar, teniendo sólo las variables imaginarias del 6DECLM, es decir, sólo x_2, y_2 y z_2 tomado sólo el plano $X_2 - Z_2$.

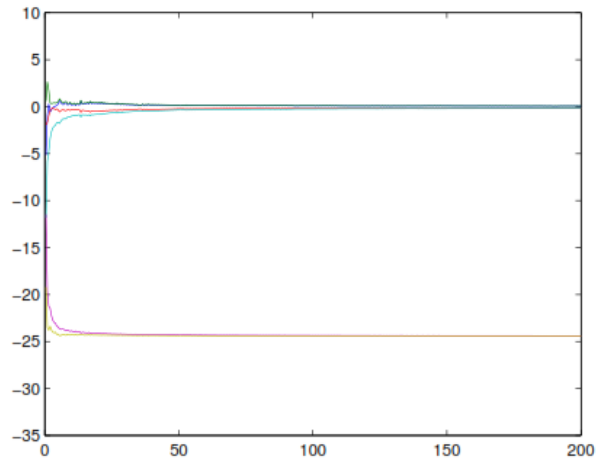


Fig. 3.9 Exponentes Lyapunov MCEL6D para una condición inicial $(1,1,1,2,2,2)$.

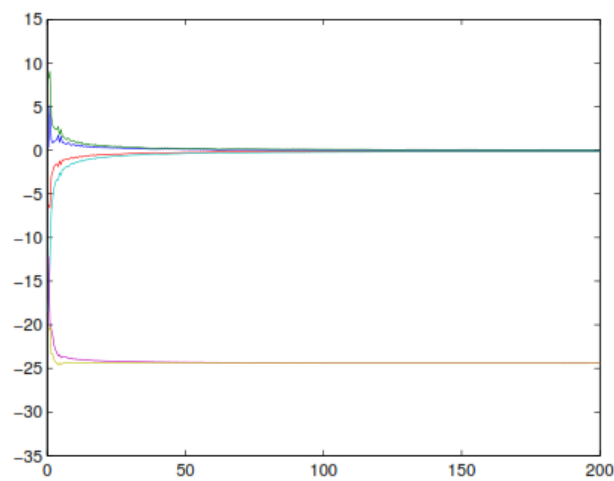


Fig. 3.10 Exponentes Lyapunov MCEL6D para una condición inicial $(0,0,0,1,1,1)$.

Es importantes destacar que los planos-fase del MCEL6D muestran una dinámica cuasi-periódica sólo para las variables reales (Fig. 3.11) y luego sólo

para las variables imaginarias (Fig. 3.12). Los plano-fase aquí mostrados son similares a los plano-fase encontrados en [10].

También se calculó la sección de Poincaré para MCEDL6D. La Fig. 3.13 representa una gráfica para la condición inicial que corresponde con $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, mientras que la Fig. 3.14 representa un diagrama análogo con una condición inicial $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Es evidente que si una condición inicial $(x_1(0), y_1(0), z_1(0), 0, 0, 0)$ tal como cuando se toma cualquier número real, pero todos los valores imaginarios se establecen como cero, entonces el mapa de Poincaré mostrará una forma de "V". Esta misma situación se presenta cuando se utilizan los puntos de equilibrio como condiciones iniciales. Tal forma de "V" también se presenta para el mapa de Poincaré del modelo clásico de Lü. Sin embargo, cuando todos los valores, reales e imaginarios, son distintos de cero, el mapa de Poincaré se presenta sólo como una línea vertical.

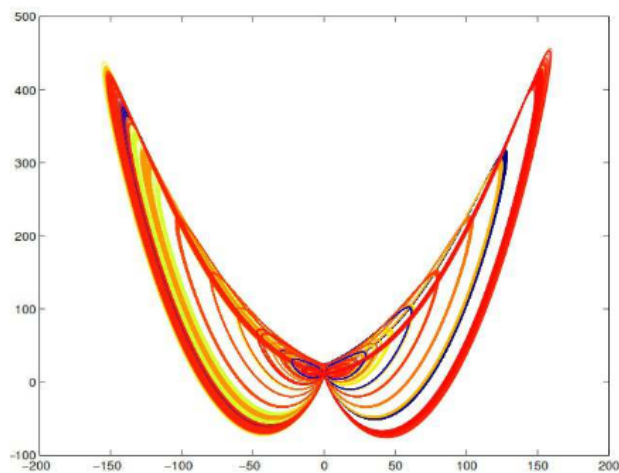


Fig. 3.11 X1-Z1 plano-fase de variables reales MCEL6D, con 144 condiciones iniciales aleatorias.

Finalmente, se presenta el diagrama de bifurcación del MCEL6D, obtenido mediante la variación del parámetro k del sistema (3.2). Para una condición inicial de $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, el diagrama de bifurcación muestra ser de periodo doble. (Fig. 3.15). Este tipo de bifurcación se obtiene cuando las variables x_1, y_1 y z_1 son diferentes de cero y las imaginarias, x_2, y_2 y z_2 son cero.

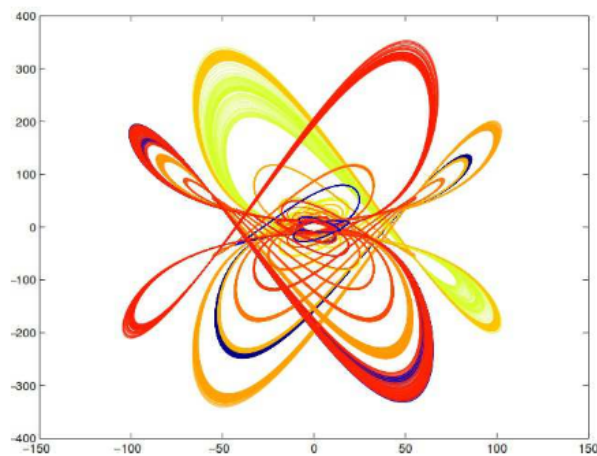


Fig. 3.12 X2-Z2 plano-fase de variables complejas MCEL6D, con 144 condiciones iniciales aleatorias.

Otra situación similar se presenta cuando el sistema toma los puntos de equilibrio como condiciones iniciales. Sin embargo, si las condiciones iniciales tienen valores en todas sus variables distintas de cero, la bifurcación no es de periodo doble, como se exhibe en la Fig. 3.16. Para esta bifurcación es posible observar que el valor de k sólo varía en un rango entre 12.5 y 14.5, donde la mayoría de los puntos están localizados.

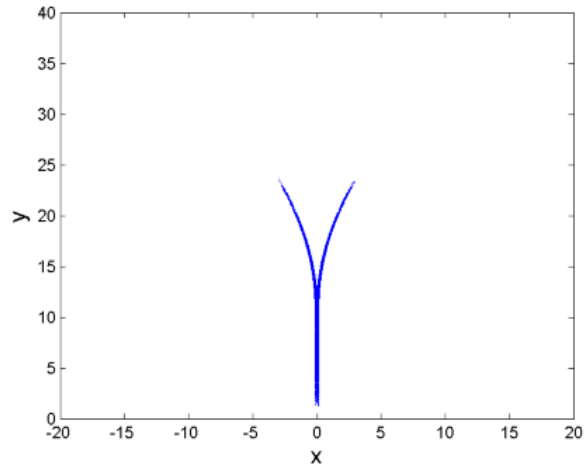


Fig. 3.13 Mapa Poincaré MCEL6D con una condición inicial de $(1,1,1,0,0,0)$.

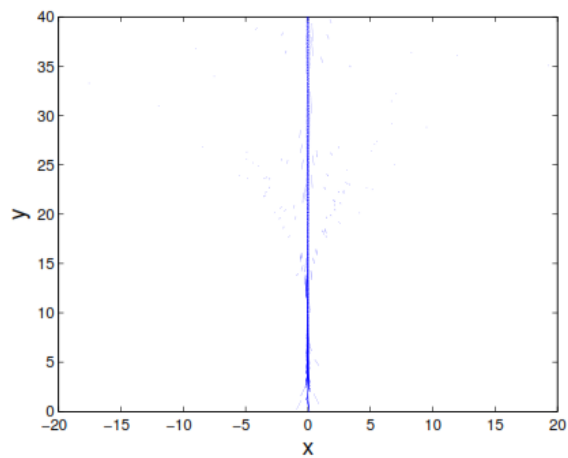


Fig. 3.14 Mapa Poincaré MCEL6D con una condición inicial de $(1,1,1,1,1,1)$.

Basado en los resultados obtenidos del MCEL6D, es posible destacar la doble naturaleza de la dinámica que presenta este sistema bajo diferentes

conjuntos de condiciones iniciales. El hipercaos es una primera dinámica que presenta el MCEL6D, tomando sus equilibrios como condiciones iniciales. Este comportamiento se mantiene cuando el conjunto de condiciones iniciales son distintos de cero para todas las variables reales y cero para todas las variables imaginarias.

La cuasi-periodicidad es una segunda dinámica que presenta el MCEL6D. En lugar de los puntos de equilibrios, si se toman condiciones iniciales en una vecindad de esos equilibrios o más allá, a continuación, del hipercaos se obtienen trayectorias cuasi-periódicas y las *alas Lü* se distorsionan.

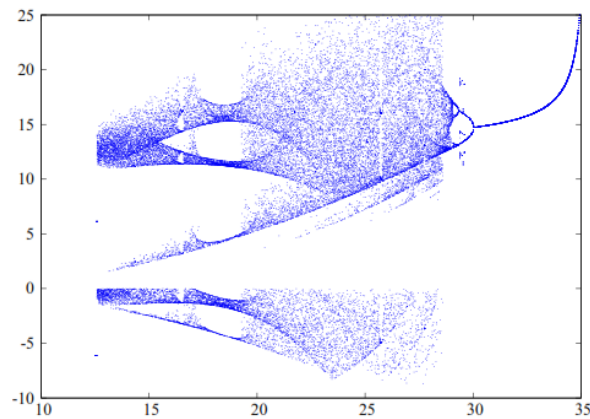


Fig. 3.15 Diagrama de Bifurcación MCEL6D para condición inicial de $(1,1,1,0,0,0)$.

Debido al hecho de que el MCEL6D tiene esta doble dinámica y sus exponentes de Lyapunov son: $L_1 = L_2 = L_4 = L_5 = 0$ y $L_3 = L_6 < 0$, este sistema puede ser identificado como un *Atractor Extraño No Caótico (SNA)* [6], [7]. Hasta donde sabemos, no existe otro sistema en 6D que posea esta propiedad dinámica.

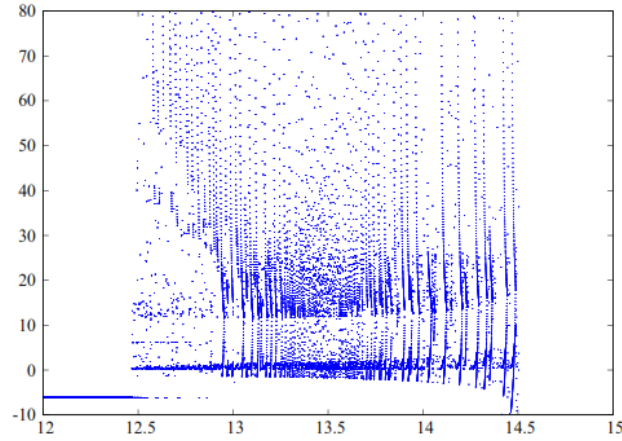


Fig. 3.16 Diagrama de Bifurcación MCEL6D para condición inicial de $(1,1,1,1,1,1)$.

3.3. Proyección en 5 dimensiones (MCEL5D)

Eliminando una de las variables complejas, es decir, haciendo $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ o $z_2 = 0$, es posible obtener las proyecciones del MCEL6D dentro de un espacio de cinco dimensiones (MCEL5D). En esta sección se describen los tres casos de estudio.

3.3.1. MCEL5D cuando $x_2 = 0$

Como se mencionó anteriormente, tomando a $x_2 = 0$, ahora el MCEL5D queda descrito por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ay_1 - ax_1 \\
\dot{y}_1 &= ky_1 - x_1z_1 \\
\dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1 \\
\dot{y}_2 &= ky_2 - x_1z_2 \\
\dot{z}_2 &= -bz_2 + x_1y_2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde x_1, y_1 y z_1 son las variables reales y y_2, z_2 son las variables imaginarias.

Equilibrio ($x_2 = 0$)

Se obtuvieron cinco puntos de equilibrio para el sistema (3.23). Estos cinco equilibrios aparecen en la Tabla 3.

Tabla 3. Puntos Equilibrio MCEL5D $x_2 = 0$					
	x_1	y_1	z_1	y_2	z_2
E_1	-6.59	-6.59	14.5	-1	-6.59
E_2	6.59	6.59	14.5	-1	-6.59
E_3	6.59	6.59	14.5	0	0
E_4	-6.59	-6.59	14.5	0	0
E_5	0	0	0	0	0

Estabilidad ($x_2 = 0$)

Adecuando la matriz Jacobiana de (3.21) a la proyección de (3.23) aquí desarrollada, sus respectivos eigenvalores aparecen en la Tabla 4. Éstos están obtenidos cuando $y_2 = 1$, porque z_2 depende de y_2 en los puntos de equilibrio

E_1 y E_2 . La estabilidad del sistema (3.23) se observa del conjunto de eigenvalores, resultando que todos sus puntos de equilibrio son hiperbólicos. Al menos unos de sus eigenvalores es positivo, por lo que todos sus equilibrios son foco-silla.

Tabla 4. Eigenvalores del MCEL5D $x_2 = 0$

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
E_1	0.3+11.1i	0.3-11.1i	-36	11.5	-25.1
E_2	0.3+19.3i	0.3-11.1i	-36	11.5	-25.1
E_3	0.3+19.3i	0.3-11.1i	-36	11.5	-25.1
E_4	0.3+19.3i	0.3-11.1i	-36	11.5	-25.1
E_5	-3+i	-3-i	-36	14.4	14.5

3.3.2. MCEL5D cuando $y_2 = 0$

Ahora tomando a $y_2 = 0$ se obtiene la segunda proyección del MCEL6D. Esta proyección MCEL5D está descrita por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= ay_1 - ax_1 & (3.24) \\
 \dot{y}_1 &= ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2 \\
 \dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1 \\
 \dot{x}_2 &= ay_2 - ax_2 \\
 \dot{z}_2 &= -bz_2 + x_2y_1
 \end{aligned}$$

donde x_1, y_1 y z_1 son las variables reales y x_2, z_2 son las variables imaginarias.

Equilibrio ($y_2 = 0$)

Aplicando el mismo operador Jacobiano obtenemos los eigenvalores del sistema (3.24), el cual resulta tener tres puntos de equilibrio el sistema. Estos equilibrios se pueden observar en la Tabla 5.

Tabla 5. Puntos Equilibrio MCEL5D $y_2 = 0$					
	x_1	y_1	z_1	x_2	z_2
E_1	-6.59	-6.59	14.5	0	0
E_2	6.59	6.59	14.5	0	0
E_3	0	0	0	0	0

Estabilidad ($y_2 = 0$)

Mediante la evaluación de los puntos de equilibrio en la matriz Jacobiana (3.21) con los coeficientes relacionados al sistema (3.24), es posible observar que todos los puntos de equilibrio son hiperbólicos y por ello todos son foco-silla. Estos resultados se exponen en la Tabla 6.

Tabla 6. Eigenvalores del MCEL5D $y_2 = 0$					
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
E_1	0.3+11.1i	0.3-11.1i	-36	-3	-25.1
E_2	0.3+11.1i	0.3-11.1i	-36	-3	-25.1
E_3	-36-0.1i	-36+0.1i	-2.9-i	-2.9+i	14.5

3.3.3. MCEL5D cuando $z_2 = 0$

Haciendo $z_2 = 0$ en el conjunto de ecuaciones (3.2), obtenemos una tercer proyección como resultado,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ay_1 - ax_1 \\
\dot{y}_1 &= ky_1 - x_1z_1 \\
\dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1 - x_2y_2 \\
\dot{x}_2 &= ay_2 - ax_2 \\
\dot{y}_2 &= ky_2 + x_2z_1
\end{aligned} \tag{3.25}$$

donde se siguen considerando a x_1, y_1 y z_1 como las variables reales y x_2, z_2 como las variables imaginarias.

Equilibrio ($z_2 = 0$)

Dando continuidad a nuestro procedimiento, se calculan los equilibrios del sistema (3.25) el cual sólo tiene dos puntos de equilibrio, que se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7. Puntos Equilibrio MCEL5D $z_2 = 0$				
	x_1, y_1	z_1	x_2	y_2
E_1	$x_1 = y_1$	14.5	$-0.7\sqrt{2y_1^2 - 87}$	$-0.7\sqrt{2y_1^2 - 87}$
E_2	$x_1 = y_1$	14.5	$0.7\sqrt{2y_1^2 - 87}$	$0.7\sqrt{2y_1^2 - 87}$

Estabilidad ($z_2 = 0$)

El equilibrio de E_1 y E_2 son hiperbólicos y foco-silla. Similar al caso analógico, si proponemos un valor de $y_1 = 1$ se calculan los eigenvalores del sistema debido a la dependencia de z_2 con respecto a y_1 . Esta misma condición se aplica a x_2 ya que depende de y_1 . La Tabla 8 muestra los eigenvalores para este sistema.

Tabla 8. Eigenvalores del MCEL5D $z_2 = 0$					
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
E_1	0.3+11.1i	0.3-11.1i	-21.5	0	-25.1
E_2	0.3+11.1i	0.3-11.1i	-21.5	0	-25.1

3.3.4. Simulaciones Numéricas MCEL5D

La Figura 3.17 representa el espacio-fase del MCEL5D cuando $x_2 = 0$ para una condición inicial de (1, 1, 1, 0.5, 0.5)

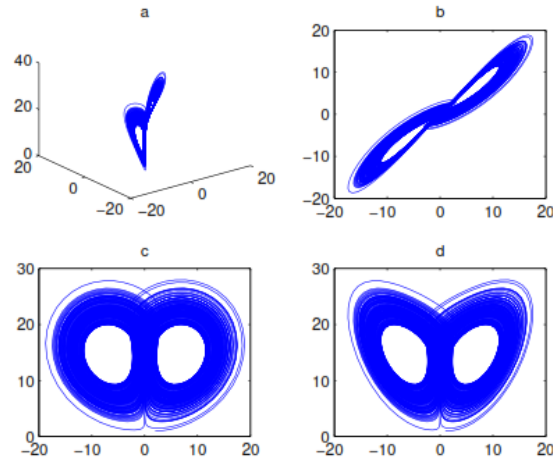


Fig. 3.17 MCEL5D con la condición inicial de (1,1,1,0.5,0.5). a) Espacio fase, b) plano XY, c) plano XZ y d) plano YZ.

Este atractor no sólo está relacionado con el sistema (3.23), sino también con los sistemas (3.24) y (3.25) para la misma condición inicial. Uno puede notar que las trayectorias de este atractor son muy similares a las órbitas descritas en el atractor clásico de Lü.

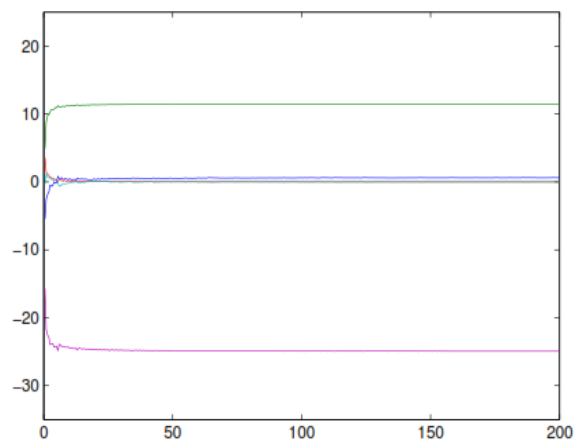


Fig. 3.18 Exponentes Lyapunov MCEL5D para una condición inicial $(1,1,1,0.5,0.5)$.

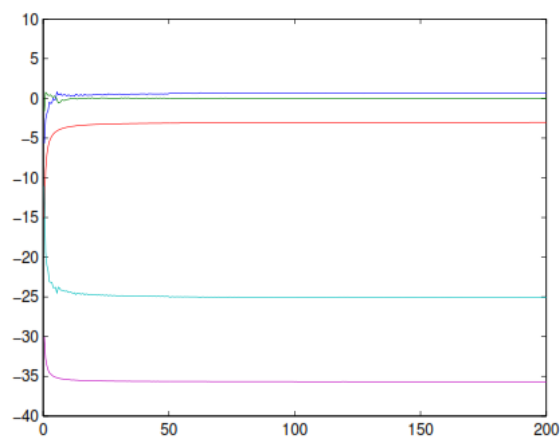


Fig. 3.19 Exponentes Lyapunov MCEL5D para una condición inicial $(1,1,1,0.5,0.5)$.

Los exponentes de Lyapunov para el MCEL5D cuando $x_2 = 0$ son $L_1 = 11.49$, $L_2 = 0.64$, $L_3 = L_4 = 0$ y $L_5 = -24.97$, la evolución de sus cálculos las podemos ver en la figura 3.18.

De manera similar, manteniendo la condición inicial de $(1, 1, 1, 0.5, 0.5)$ las figuras 3.19 y 3.20 muestran la evolución de los cálculos de los exponentes de Lyapunov para MCEL5D cuando $y_2 = 0$ y $z_2 = 0$, por lo que son $L_1 = 0.63, L_2 = 0, L_3 = -3, L_4 = -25.05, L_5 = -35.68$ para $y_2 = 0$ y $L_1 = 0.63, L_2 = 0, L_3 = 0, L_4 = -21.37, L_5 = -24.98$ cuando $z_2 = 0$.

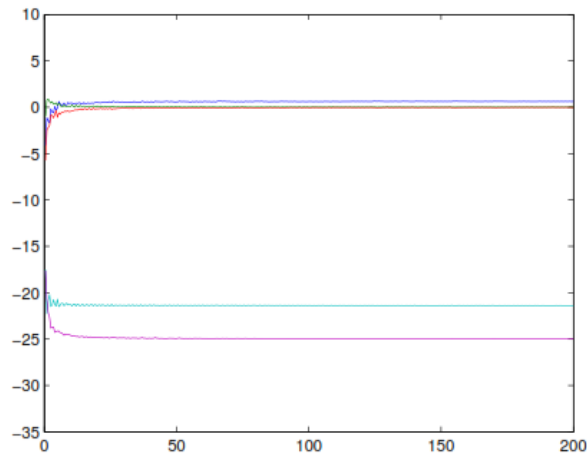


Fig. 3.20 Exponentes Lyapunov MCEL5D para una condición inicial $(1,1,1,0.5,0.5)$.

El mapa de Poincaré se calculó para el MCEL5D así como sus diagramas de bifurcación. En la Figura 3.21 se muestra el mapa de Poincaré para el sistema (3.23) cuando $x_2 = 0$ bajo la condición $(1, 1, 1, 0.5, 0.5)$. Para el sistema (3.24) y (3.25) el mapa de Poincaré muestra una forma de V observada también previamente en el MCEL6D y en el modelo clásico de Lü, bajo ciertas condiciones. Por otro lado, la figura 3.22 muestra el periodo doble en el diagrama de bifurcación para el sistema (3.23) cuando $x_2 = 0$ con una condición inicial de $(1, 1, 1, 0.5, 0.5)$. Como en el caso del MCEL6D, el parámetro k es el que varía.

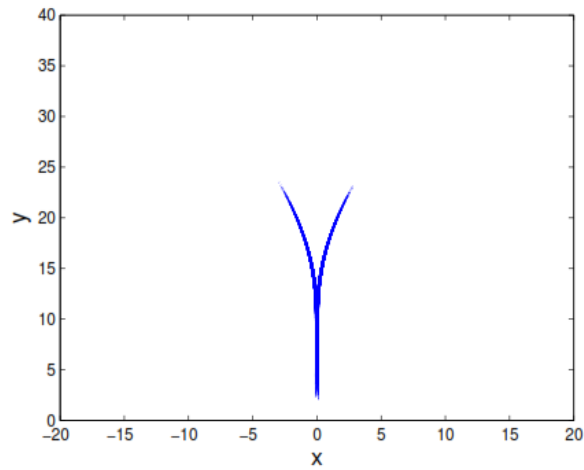


Fig. 3.21 Mapa Poincaré MCEL5D con una condición inicial de $(1,1,1,0.5,0.5)$.

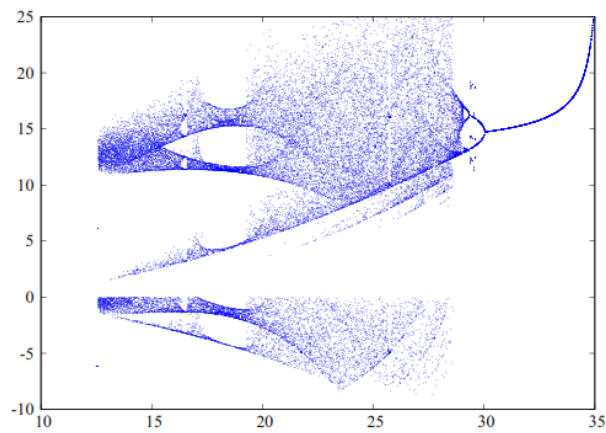


Fig. 3.22 Diagrama de Bifurcación MCEL5D para condición inicial de $(1,1,1,0.5,0.5)$.

Para los sistemas (3.24) y (3.25) se exhiben diagramas de bifurcación idénticos bajo las condiciones iniciales utilizadas en el MCEL6D. Este mismo diagrama de bifurcación se obtiene para el caso del modelo clásico de Lü en

3D. Basados en los espacio-fase, sus exponentes de Lyapunov, los mapas de Poincaré y los diagramas de bifurcación, se confirma el comportamiento caótico en las proyecciones del MCEL5D.

3.4. Proyección en 4 dimensiones (MCEL4D)

Ahora eliminando dos de las variables complejas, es decir, haciendo $x_2 = y_2 = 0, x_2 = z_2 = 0$ o $y_2 = z_2 = 0$, es posible obtener las proyecciones del MCEL6D dentro de un espacio de cuatro dimensiones (MCEL4D). En esta sección se describen los tres casos de estudio.

3.4.1. MCEL4D cuando $x_2 = y_2 = 0$

Cuando del MCEL6D tomamos a $x_2 = y_2 = 0$ la proyección en cuatro dimensiones es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ay_1 - ax_1 \\ \dot{y}_1 &= ky_1 - x_1z_1 \\ \dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1 \\ \dot{z}_2 &= -bz_2\end{aligned}\tag{3.26}$$

donde x_1, y_1 y z_1 son las variables reales y z_2 es la variable imaginaria.

Equilibrio ($x_2 = y_2 = 0$)

El MCEL4D del sistema (3.26) tiene tres puntos de equilibrio, los cuales aparecen en la Tabla 9.

Tabla 9. Puntos Equilibrio MCEL4D $x_2 = y_2 = 0$				
	x_1	y_1	z_1	z_2
E_1	-6.59	-6.59	14.5	0
E_2	6.59	6.59	14.5	0
E_3	0	0	0	0

Estos equilibrios son hiperbólicos y foco-silla en su estabilidad del sistema como se determina a continuación.

Estabilidad ($x_2 = y_2 = 0$)

La Tabla 10 contiene los eigenvalores del MCEL4D cuando $x_2 = y_2 = 0$.

Tabla 10. Eigenvalores del MCEL5D $x_2 = y_2 = 0$				
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
E_1	0.3+11.1i	0.3-11.1i	-3	-25.1
E_2	0.3+19.3i	0.3-11.1i	-3	-25.1
E_3	-36	-3	-3	14.5

Como hemos mencionado antes, la naturaleza de la estabilidad de cada punto de equilibrio está directamente relacionado con el signo de cada parte real de estos valores propios.

3.4.2. MCEL4D cuando $x_2 = z_2 = 0$

Una segunda versión del MCEL4D se consigue si $x_2 = z_2 = 0$, como lo demuestra el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= ay_1 - ax_1 \\
 \dot{y}_1 &= ky_1 - x_1z_1 \\
 \dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1 \\
 \dot{y}_2 &= ky_2
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde x_1, y_1 y z_1 son las variables reales y y_2 es la variable imaginaria.

Equilibrio ($x_2 = z_2 = 0$)

La segunda versión del MCEL4D es el sistema (3.27), el cual también contiene tres puntos de equilibrio cuyos valores aparecen en la Tabla 11.

Tabla 11. Puntos Equilibrio MCEL4D $x_2 = z_2 = 0$				
	x_1	y_1	z_1	y_2
E_1	-6.59	-6.59	14.5	0
E_2	6.59	6.59	14.5	0
E_3	0	0	0	0

Estabilidad ($x_2 = z_2 = 0$)

La Tabla 12 contiene los eigenvalores para el sistema cuando $x_2 = z_2 = 0$.

Tabla 12. Eigenvalores del MCEL5D $x_2 = z_2 = 0$				
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
E_1	0.3+11.1i	0.3-11.1i	-25.2	14.5
E_2	0.3+19.3i	0.3-11.1i	-25.1	14.5
E_3	14.5-i	14.5+i	-3	-36

Como puede observarse, todos estos tres equilibrios son foco-silla, debido a los diferentes valores de los signos observados en los valores propios para cada caso.

3.4.3. MCEL4D cuando $y_2 = z_2 = 0$

Una tercera versión de MCEL4D cuando $y_2 = z_2 = 0$ la describe el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ay_1 - ax_1 \\ \dot{y}_1 &= ky_1 - x_1z_1 \\ \dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1 \\ \dot{y}_2 &= -ax_2\end{aligned}\tag{3.28}$$

donde x_1, y_1 y z_1 son las variables reales y x_2 es la variable imaginaria.

Equilibrio ($y_2 = z_2 = 0$)

La última versión del MCEL4D tiene también tres puntos de equilibrios, los cuales se incluyen en la Tabla 13.

Tabla 13. Puntos Equilibrio MCEL4D $x_2 = z_2 = 0$				
	x_1	y_1	z_1	x_2
E_1	-6.59	-6.59	14.5	0
E_2	6.59	6.59	14.5	0
E_3	0	0	0	0

Estabilidad ($y_2 = z_2 = 0$)

Los eigenvalores del MCEL4D cuando $y_2 = z_2 = 0$ están contenidos en la Tabla 14.

Tabla 14. Eigenvalores del MCEL5D $y_2 = z_2 = 0$				
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
E_1	0.3+11.1i	0.3-11.1i	-36	-25.1
E_2	0.3+19.3i	0.3-11.1i	-36	-25.1
E_3	-36	-3	-3	14.5

Como en las situaciones anteriores para esta proyección en cuatro dimensiones, todos los puntos de equilibrio son foco-silla en cada uno de ellos.

3.4.4. Simulaciones Numéricas MCEL4D

Los espacios-fase y los planos-fase a partir del MCEL4D son muy similares a las trayectorias descritas en las proyecciones del MCEL5D. La figura 3.23 representa el espacio-fase y los planos-fase del sistema (3.26) con la condición inicial de (1, 1, 1, 0.5). Bajo esta misma condición inicial en los sistemas (3.27) y (3.28) se obtienen comportamientos similares al descrito por el sistema anterior.

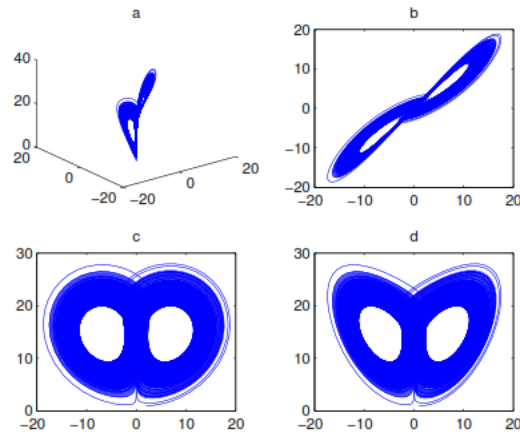


Fig. 3.23 MCEL4D con la condición inicial de $(1,1,1,0.5)$. a) Espacio fase, b) plano XY, c) plano XZ y d) plano YZ.

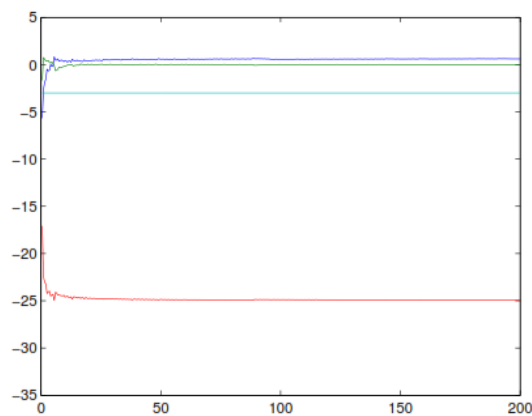


Fig. 3.24 Exponentes Lyapunov MCEL4D para una condición inicial $(1,1,1,0.5)$.

Si la condición inicial es $(1, 1, 1, 0.5)$ y utilizamos el sistema (3.26) los exponentes de Lyapunov son: $L_1 = 0.65, L_2 = 0, L_3 = -3$ y $L_4 = -23.95$,

y la evolución de sus exponentes en el tiempo se encuentran en la figura 3.24. De manera similar, para el sistema (3.27) sus respectivos exponentes de Lyapunov son: $L_1 = 14.5$, $L_2 = 0.65$, $L_3 = 0$ y $L_4 = -24.85$, que se muestra en la gráfica 3.25; y por último para el sistema (3.28) sus exponentes de Lyapunov son: $L_1 = 0.64$, $L_2 = 0$, $L_3 = -25.07$ y $L_4 = -35.68$ que aparecen en la figura 3.26.

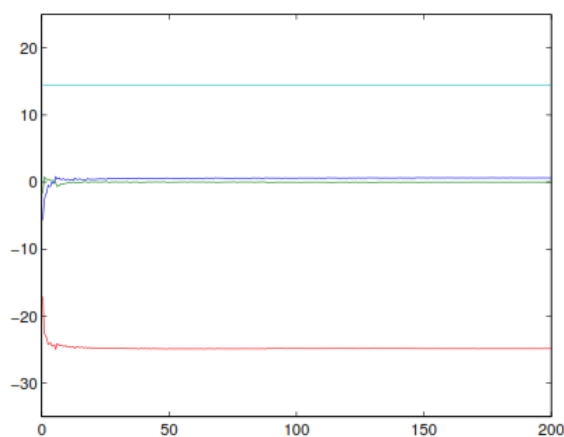


Fig. 3.25 Exponentes Lyapunov MCEL4D para una condición inicial (1,1,1,0.5).

Los mapas de Poincaré también se calcularon para el MCEL4D con una condición inicial de (1, 1, 1, 0.5). La figura 3.27 corresponde a tal mapa cuando $x_2 = y_2 = 0$, es decir, el sistema (3.26). La forma de V es muy similar para los sistemas (3.27) y (3.28) bajo las mismas condiciones iniciales, las cuales son comparables con el comportamiento del MCEL5D y con el modelo clásico de Lü.

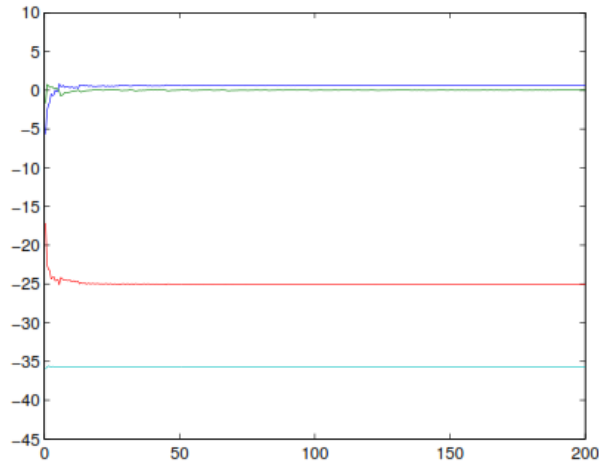


Fig. 3.26 Exponentes Lyapunov MCEL4D para una condición inicial $(1,1,1,0.5)$.

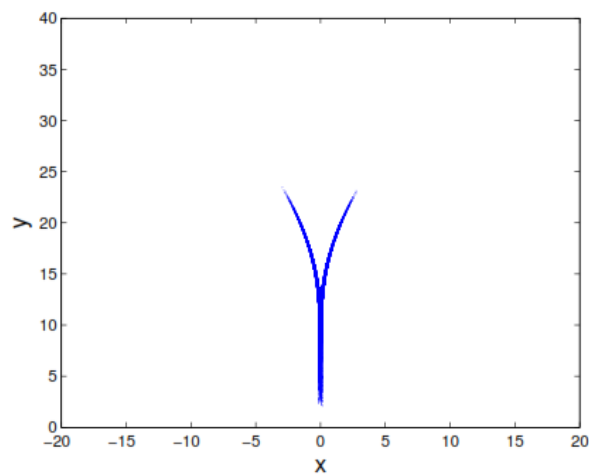


Fig. 3.27 Mapa Poincaré MCEL4D con una condición inicial de $(1,1,1,0.5)$.

Finalmente la figura 3.28 exhibe el diagrama de bifurcación cuando $x_2 = y_2 = 0$ bajo la misma condición inicial de $(1, 1, 1, 0.5)$, variando el parámetro

k como el fue el caso del MCEL6D y el MCEL5D. Para un conjunto de diversas condiciones iniciales, este mismo diagrama de bifurcación para el MCEL6D y para las proyecciones del MCEL5 o el modelo clásico de Lü.

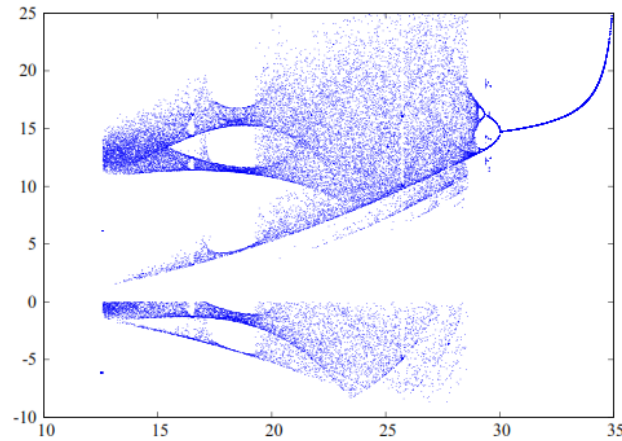


Fig. 3.28 Diagrama de Bifurcación MCEL4D para condición inicial de $(1,1,1,0.5)$.

Basado en el análisis de los espacios-fase, los exponentes de Lyapunov, los mapas de Poincaré y los diagramas de bifurcación, el MCEL4D en cuatro dimensiones, es decir, en sus tres versiones posibles, muestran un comportamiento caótico.

Capítulo 4

Modelo de Tráfico

En el presente capítulo se expondrá una aplicación de los sistemas dinámicos complejos al caso particular de un sistema de tráfico vehicular. Ya en el primer capítulo se dio una introducción sobre el modelo del Diagrama Fundamental.

4.1. Aproximación Polinomial

El diagrama fundamental de densidad-flujo es el argumento más conocido en la comunidad de tráfico de vehículos y es una de las características más analizadas de un sistema de tráfico. En relación directa con el modelo hidrodinámico de LWR [34], [35] y confirmado por miles de mediciones de carretera en todo el mundo [24], [25], [26], que es el punto de partida para el establecimiento de modelos de tráfico [27].

Varios autores han propuesto expresiones matemáticas para lograr una aproximación bastante exacta para modelar los fenómenos reales y para realizar análisis teórico. Algunos de ellos están hechos de funciones continuas [29], [36] y otros están contruidos de manera a trozos [26]. Todos ellos tratan

de incluir las variables y parámetros que intervienen en los fenómenos de tráfico con el fin de lograr una mejor aproximación de los datos correspondientes que validan los modelos. Se presenta una aproximación polinómica en este capítulo, con algunas ventajas notables que serán introducidas a través de su descripción y análisis en esta investigación.

Con el fin de obtener una aproximación precisa del diagrama fundamental, hemos tenido en cuenta sus puntos principales y especificaciones también (Fig. 2.1). Proponemos un polinomio de grado tres,

$$q(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 \quad (4.1)$$

Esta función se elige a causa de la forma no simétrica observada en el diagrama de densidad-flujo real, en lugar de una forma cuadrática que necesariamente supone una parábola simétrica [29].

El coeficiente a_0 se puede obtener haciendo $k = k_0$,

$$q(k_0) = a_0(k_0 - k_1)(k_0 - k_2)(k_0 - k_3)$$

$$\implies a_0 = \frac{q(k_0)}{(k_0 - k_1)(k_0 - k_2)(k_0 - k_3)} \quad (4.2)$$

Los coeficientes a_1, a_2, a_3 se obtienen de una manera similar, haciendo $k = k_1, k = k_2, k = k_3$ respectivamente y la sustitución en la ecuación (4.2) se pueden escribir en la forma compacta y general de,

$$q(k) = \sum_{i=0}^n L_i(k)q(k_i)$$

$$L_i = \prod_{h=0}^n \frac{(k - k_h)}{k_i - k_h} \quad (4.3)$$

con $i = 0, 1, \dots, n, h = 0, 1, \dots, n$ y $i \neq h$. Las expresiones (4.3) se conocen como *Polinomio de Lagrange* [28] y para nuestro caso en particular $n = 3$. Para llevar a cabo un análisis normalizado, sean $k_C = \frac{1}{4}k_J, v = 4w$ y $k_J = 1$. Estos valores y proporciones están acuerdo con los datos observados experimentalmente [26], es decir, con una variación mínima se ha observado que la velocidad de la onda hacia atrás w es de aproximadamente un cuarto de su valor absoluto con respecto a la magnitud de la velocidad de libre flujo v .

Tomando en cuenta estos hechos, es posible proponer valores para calcular los coeficientes de las ecuaciones (4.3), dados en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Polinomio Lagrange		
p	k	Q
1	$k_0 = 0$	$q_0 = 0$
2	$k_1 = \frac{3}{4}k_C = \frac{3}{16}$	$q_1 = q(k_1) = k_1 v$
3	$k_2 = k_C + 4(k_C - k_1)$	$q_2 = q(k_1) = q(k_2)$
4	$k_3 = k_J = 1$	$q_3 = 0$

El polinomio que toca los puntos $(0, 0), (k_1, q(k_2)), (k_2, q(k_2))$ y $(k_J, 0)$ dado por la Tabla 4.1 es,

$$q(k) = \frac{k^3 - (k_J + k_2)k^2 + k_2 k_J k}{k_1^3 - (k_J + k_2)k_1^2 + k_2 k_J k_1} q(k_1) + \frac{k^3 - (k_J + k_1)k^2 + k_1 k_J k}{k_2^3 - (k_J + k_1)k_2^2 + k_1 k_J k_2} q(k_2) \quad (4.4)$$

Algunas de las ventajas identificadas en este enfoque son: los puntos mínimos y máximos de densidad y flujo son tomados en cuenta en el diseño de la función que representa el diagrama fundamental, correspondientes a los conceptos teóricos y experimentales.

Por otra parte, es evidente que las siguientes relaciones se mantienen,

$$q(k_1, v) = k_1 v = \frac{3}{4} k_C v = \frac{3}{16} k_J v \quad (4.5)$$

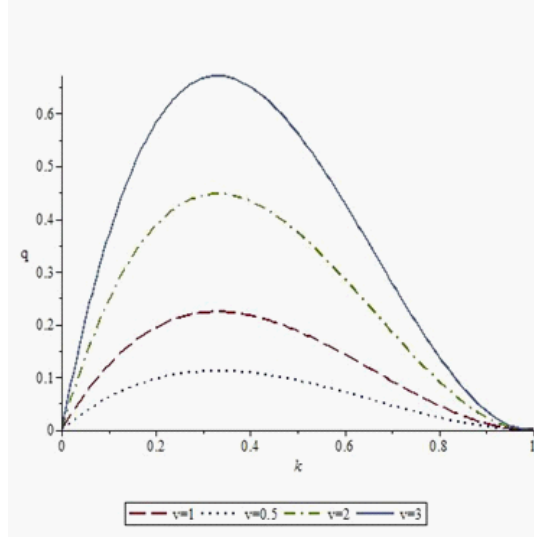


Fig. 4.1 Forma polinomial ante variaciones de v .

Del caso específico de la ecuación (4.5) es posible tener en cuenta que dadas dos de las variables la tercera puede ser calculada pero dependiendo de estos valores de la altura, anchura, y las proporciones generales del cambio de la curva, se espera que el comportamiento del tráfico representado por ella también cambie. De esta manera, tomando los valores en la Tabla 1 y las expresadas por la ecuación (4.5), la ecuación (4.4) puede escribirse como,

$$q(k, v) = \left(\frac{20}{13} k^3 - \frac{159}{52} k^2 + \frac{79}{52} k \right) v = P(k, v) \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es una curva cóncava, tal como se esperaba (Fig. 4.1), cuyo dominio debe limitarse a $0 \leq k \leq 1$ para los fines de normalización de

nuestro modelo. Los puntos donde $k = 0$ y $k = 1$ son los dos puntos donde la densidad es la más baja y la más alta, tal como se define. Este polinomio tiene un máximo en

$$k_C \cong 0,331 \quad (4.7)$$

Por otra parte, la escala vertical relacionada con el flujo q no es fija en la misma manera que la escala para la densidad de k , ya que se ve afectada por la velocidad v . Esta variable está limitada por restricciones físicas relacionadas con la corriente de los vehículos a diferencia de densidad relacionada con la carretera y su geometría.

La velocidad v se considera constante para un proceso en particular, lo que significa que una cantidad tal modifica los valores de los coeficientes en (4.6) y por lo tanto es posible trabajar con un polinomio $Q(k) = P(k, v)$ de la variable de densidad con la preservación de unidades apropiadas en los respectivos coeficientes.

$$Q(k) = \left(\frac{20}{13}k^3 - \frac{159}{52}k^2 + \frac{79}{52}k \right) v \quad (4.8)$$

En la ecuación (4.8) se conserva la forma del diagrama fundamental como se representa en la Fig. 4.1, pero sólo depende de una sola variable. Por la normalización hecha a esta variable, donde $k \in [0, 1]$, es posible ver también que $Q(k) \in [1, 0]$. Entonces también es posible llevar a cabo un proceso iterativo de la forma $k_{i+1} = Q(k_i)$, donde el índice i ahora se utiliza para indicar este proceso iterativo, conservando todas las propiedades del polinomio obtenido, pero tratándolo como un sistema dinámico discreto de lo que resulta la siguiente expresión,

$$k_{i+1} = \left(\frac{20}{13}k_i^3 - \frac{159}{52}k_i^2 + \frac{79}{52}k_i \right) = Q(k_i) \quad (4.9)$$

Los valores reales de k_i sobre la ecuación (4.9) condicionan el siguiente estado k_{i+1} , es decir, partiendo de una condición inicial k_0 , la ecuación (4.9) generará un nuevo valor k_1 , continuando en una secuencia $\{k_n\} = \{k_0 k_1 \dots k_{i+1}\}$ como otros trabajos que se han hecho con funciones de tipo logístico [30], [32] y [36].

Como se mencionó anteriormente, uno de los objetivos es ajustar la forma de la curva utilizada para realizar los mismos procesos iterativos que aparecen en este tipo de publicaciones, donde las iteraciones se realizan sobre las funciones de una sola dimensión con expresiones tales como $X_{i+1} = F(X_i)$. A pesar de que la ecuación (4.9) viene evidentemente de una función de dos dimensiones, debido a la normalización que conserva las propiedades del diagrama fundamental restringido a un cuadrado unitario [30], [35], los procesos son válidos.

4.2. Análisis de Estabilidad

De la ecuación (4.9) es posible calcular algunas propiedades interesantes de este modelo discreto. Para hacerlo utilizamos las definiciones del Capítulo 2, para obtener un punto fijo del sistema. El sistema (4.9) tiene un punto fijo $k^* = k_i$ si existe el punto (k_i, k_i) en la gráfica del conjunto generado iterado, es decir, el punto fijo también existe en una línea de 45° con respecto a la misma curva del sistema discreto. Teniendo en cuenta la Definición 2.7, a partir de la ecuación (4.9) es posible obtener los tres posibles puntos fijos k^* para la densidad de k , siendo $k^* = 0$ uno de ellos, trivialmente obtenido, mientras que los otros dos puntos fijos pueden ser resultado de la ecuación (4.10), lo que resulta en función en términos de la velocidad v solamente.

$$k^* = \frac{159}{160} \pm \frac{1}{160} \sqrt{\frac{1}{v}(v + 16640)} \quad (4.10)$$

Dado que el polinomio propuesto es de tercer grado, sólo esperamos tres puntos fijos cada vez que se calcula un nuevo proceso iterativo, al cambiar la velocidad v en cada uno de tales procesos. La figura 4.2 representa el comportamiento de dichos puntos fijos. Sin embargo, debido a que el conjunto de los valores de densidad es $0 \leq k \leq 1$, uno de los puntos fijos (k_1^* en la Fig. 4.2) no es útil para nuestro análisis porque $k_1 > 1$.

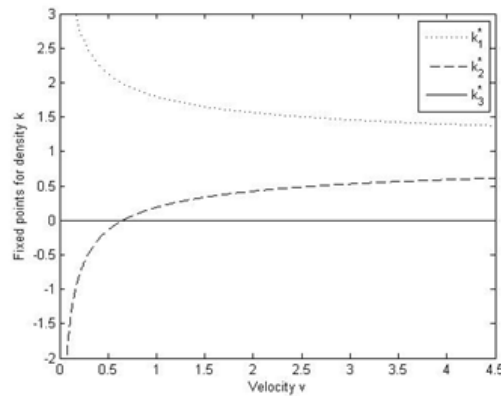


Fig. 4.2 Puntos fijos ante variaciones de velocidad v .

Por otro lado, hay dos puntos fijos para los cuales estos valores están incluidos en ese intervalo, k_2^* (como se indica en la Fig. 4.2), donde $v_{k_2^*=0} \cong 0.658$ y k_3^* (como se muestra en la figura 4.2), que es siempre 0. Estos puntos fijos señalan aquellos valores donde la densidad k se ve afectada por la velocidad v , producen diferentes comportamientos en la evolución de esta variable.

4.3. Comportamiento Dinámico

De los Teoremas 2.10 y 2.13 es posible conocer la forma en que la convergencia a un punto fijo se lleva a cabo alrededor del valor máximo de densidad. De hecho, si el punto fijo está antes que el máximo de densidad, entonces la derivada de Q es positiva, $0 < M < 1$ y las iteraciones se comportan de una manera monótona. Si el punto fijo se encuentra después del valor máximo de densidad, entonces la derivada de Q es negativa, $-1 < M < 0$ y las iteraciones se comportan de una manera cíclica. Este comportamiento no es independiente del valor de la velocidad v . De hecho, de los cálculos representados en la figura 4.2 es posible ver que para $v \rightarrow 0$, el punto fijo $k^* = 0$ (k_3^* en la Fig. 4.2) es un punto periódico atractor en un comportamiento asintótico hacia delante como se indica por Definición 2.8 y 2.9, ya que no hay otro punto fijo en el intervalo $k \in [0, 1]$.

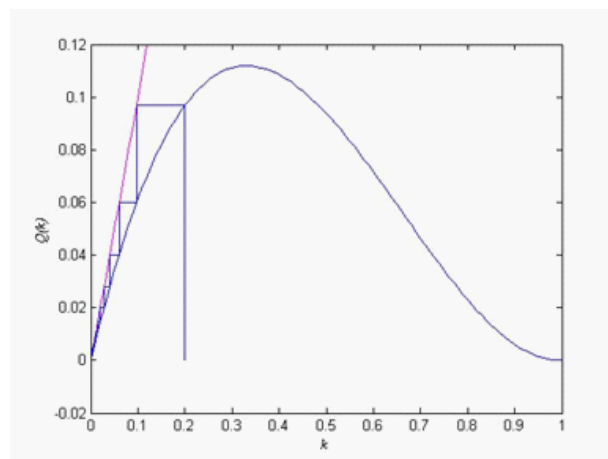


Fig. 4.3 Trayectoria para $v = 0.5$ (densidad inicial $k = 0.2$, valor final $k = 0$).

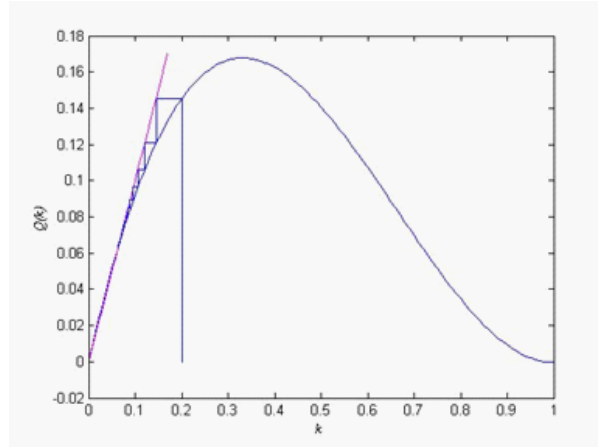


Fig. 4.4 Trayectoria para $v = 0.75$ (densidad inicial $k = 0.2$, valor final $k = 0.628$).

Al comenzar con una densidad inicial de $k = 0.2$ y una velocidad $v = 0.50$, el comportamiento de la trayectoria iterada tiende hacia cero monotónicamente (Fig. 4.3), como se ha mencionado. Esta situación está estrechamente relacionada con el tráfico de una carretera observada con los valores iniciales de baja densidad de vehículos en evolución hacia una condición vacía, una situación observada sobre todo durante esas horas entre la noche y la mañana siguiente.

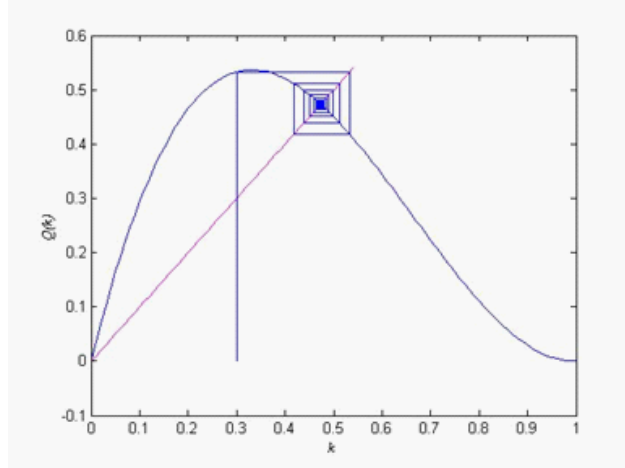


Fig. 4.5 Trajectory for $v = 2.40$ (densidad inicial $k = 0.3$, valor final $k = 0.473$).

El aumento de la velocidad v , alcanzando $v_{k_2^*=0} \cong 0.658$, un segundo punto fijo (k_2^* en la figura 4.2) aparece y el teorema 2.13 puede ser validado por $0 \leq k_2^* \leq 0.5$ y para todo k_3^* . En este caso k_3^* es un punto periódico repulsor y k_2^* es un atractor (Definición 2.8), de manera asintótica hacia adelante también (Definición 2.9). Cuando se inicia de nuevo con una densidad inicial de $k = 0.2$, pero con una velocidad $v = 0.75$, el comportamiento de la trayectoria iterada se aleja del origen y ahora se acerca hacia el punto fijo $k = 0.063$ aproximadamente (Fig. 4.4), también de manera monótonica, de acuerdo con las definiciones y los análisis señalados en la última sección. Ésta es una situación que se refiere a estas circunstancias reales donde la evolución del tráfico va a los valores estables de baja densidad.

Los casos representados en las figuras. 4.3 y 4.4 tienen en común una velocidad v que afecta a la forma del polinomio, de tal manera que la línea de 45° no sobrepase el valor máximo de esta función $k \cong 0.331$ cuando lo atraviesan. Con este valor de k y de la ecuación (4.10), es posible obtener

$v = 1.481$ como el valor límite donde el comportamiento de las trayectorias cambia en oscilaciones, pero aun así se comporta como exponencialmente estable de acuerdo con el Teorema 2.13.

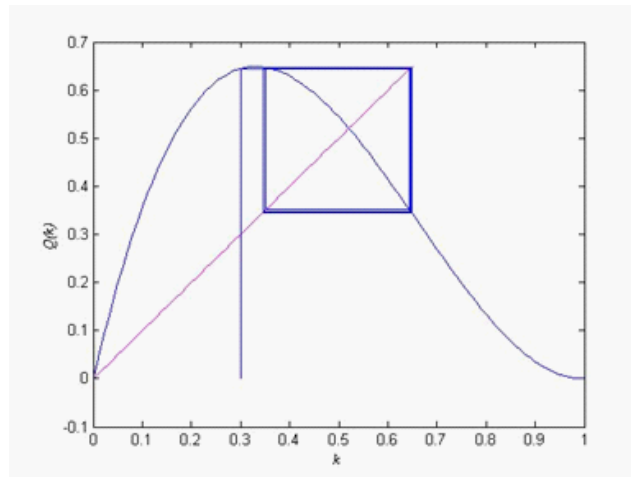


Fig. 4.6 Trayectoria para $v = 2.90$ (densidad inicial $k = 0.3$, valor final $k = 0.346$ y $k = 0.648$).

Esto se puede ver en la Fig. 4.5 para una velocidad de $v = 2.40$, con una densidad inicial $k = 0.3$. En este caso, el punto fijo es atractor de aproximadamente $k = 0.473$. Como en los dos casos, el tráfico evoluciona a una condición estable, pero en esta situación específica está congestionado, porque los valores de densidad son altos en comparación, y el flujo comienza a tender hacia valores bajos. Por otro lado, en los tres casos descritos hasta aquí, la estabilidad en el tráfico se muestra como un conjunto de puntos que convergen hacia un único punto final. A pesar de que se puede iniciar a partir de diferentes condiciones iniciales, se puede verificar que la forma de las trayectorias será prácticamente la misma después de que los transitorios se desvanecen.

Es útil trazar otra figura en la que los valores finales se dibujan contra el valor de la velocidad v de la que se generaron. La figura 4.6 muestra las posiciones de aquellos valores finales. De esta manera, es posible ver que a partir de $v = 0$ a $v \cong 0.648$ todas las trayectorias tienden a cero, como ya se ha mencionado para este intervalo. Después de este valor de v , las trayectorias posibles también convergen hacia un valor fijo atractor, que aumenta a medida que la velocidad v también aumenta.

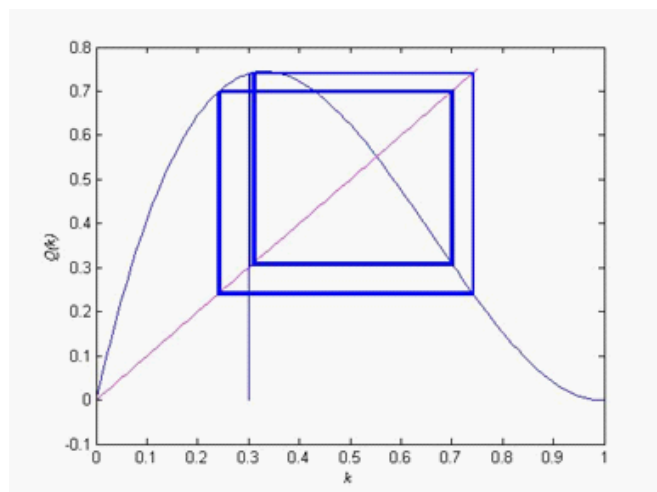


Fig. 4.7 Trajectory for $v = 3.33$ (densidad inicial $k = 0.3$, valor final $k = 0.239$, $k = 0.697$, $k = 0.314$ y $k = 0.743$).

Cuando la velocidad v se incrementa hasta $v = \frac{8}{3} \cong 2.667$, el punto fijo correspondiente es $k_2^* = \frac{1}{2}$ y ya no es posible verificar el resultado del Teorema 2.12. A pesar de que es posible observar un comportamiento estable, éste es de naturaleza distinta, haciendo un diferente tipo de proceso iterativo. En la figura 3.6 se muestra una trayectoria que no converge a un solo punto, sino a un ciclo límite. Aquí $v = 2.90$ y es posible ver en la figura 4.6 que este valor corresponde a una región donde dos valores finales del polinomio

(4.10) se pueden obtener, que está en correspondencia con la trayectoria periódica encontrada. En otras palabras, esta trayectoria u órbita exhibirán $k = 0.346$ y $k = 0.648$ para cualquier par de futuras iteraciones después de la estabilización. Entonces, según lo declarado por la Definición 2.13, se tiene un primer periodo $m_0 = 2$. Observe que el valor fijo corresponde con los cálculos que se representan en la figura 4.2 de la ecuación (3.10). Es importante señalar que tal comportamiento se observa también en el tráfico real [26].

Este fenómeno cíclico aumenta su complejidad cuando v varía como se muestra en la Fig. 4.7. A partir de este mapeo, si la velocidad se incrementa aproximadamente a $v = 3.3$ la periodicidad cambia. En la figura 4.7 representa un ciclo límite con $m_0 = 4$ y valores: $k = 0.239, k = 0.697, k = 0.314$ y $k = 0.743$. Como se ve en la figura 4.8 este valor de v corresponde a una región en la que hay cuatro ramas que se separaron de la anterior región de dos ramas.

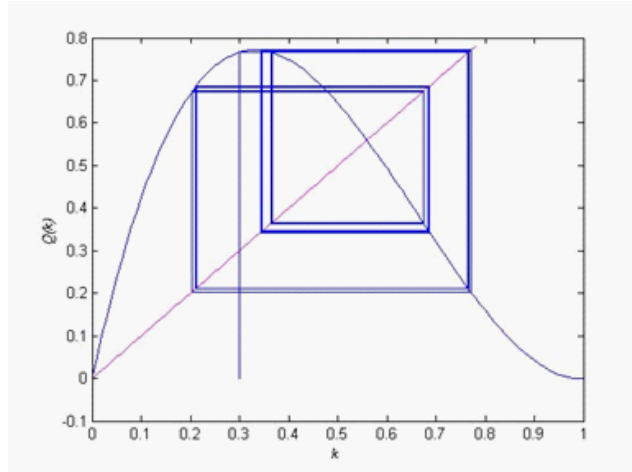


Fig. 4.8 Trayectoria para $v = 3.45$ (densidad inicial $k = 0.3$, valor final $k = 0.343$, $k = 0.771$, $k = 0.203$).

Si este proceso se repite, ahora para $v = 3.45$ (Fig. 4.8), $m_0 = 8$, el mapa de bifurcación está en una región de ocho ramas (Fig. 4.11), con órbitas cíclicas con valores de $k = q = 0.343$, $k = q = 0.771$, $k = 0.203$, $k = 0.674$, $k = 0.366$, $k = 0.766$, $k = 0.212$ y $k = 0.687$ aproximadamente. En situaciones reales, estos tres últimos casos corresponderían a situaciones que cambian de valores casi óptimos a valores del flujo de congestión grave en forma oscilante como se señala en los escenarios reales [26].

Como ya es conocido para esquemas iterativos similares [29], [30], [36], este comportamiento cíclico duplica su período de una manera descrita por la el mapeo en la Fig. 4.11. La velocidad v es un parámetro que provoca este tipo de comportamiento. Es posible encontrar más de estas regiones que duplican la periodicidad de los parámetros a medida que aumenta la velocidad.

Sin embargo, como puede verse en la misma figura 4.11, el tamaño de los intervalos disminuyen progresivamente y luego una n -periodicidad se fusiona-

rá con facilidad con el siguiente periodo $2n$ y rápidamente con la siguiente región de duplicación de periodo. Este comportamiento es técnicamente determinista pero prácticamente impredecible y se dice que un sistema caótico se ha encontrado.

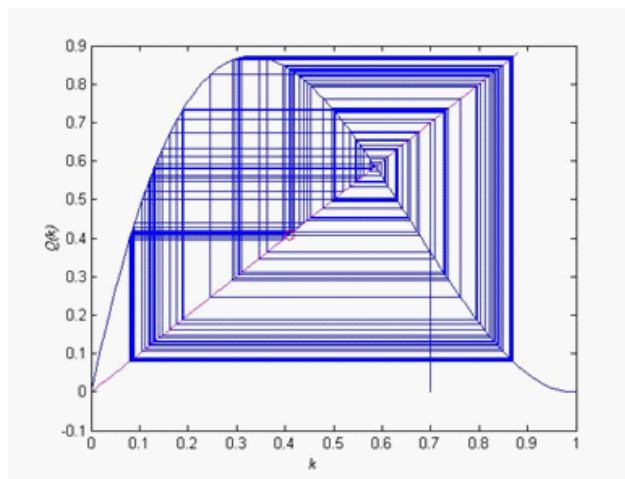


Fig. 4.9 Trayectoria para $v = 3.90$ (densidad inicial $k = 0.7$, valor final $k = 0.408$).

Para $v = 3.9$ el sistema está en una región caótica, con periodicidad no determinado, lo que significa que a pesar de que este sistema es determinista, ya que sigue un modelo matemático bien definido, las desviaciones en las trayectorias que comienzan muy cerca se magnificarán a medida que pasan iteraciones. Por ejemplo, en la Fig. 4.11 se muestra el polinomio con $v = 3.9$, a partir de $k = 0.7$ y después de un número de iteraciones de 120 el valor final alcanzado es $k = 0.408$. Para una ligera desviación en la condición inicial, es decir, $k = 0,701$ (Fig. 4.9), dejando todos los demás valores iguales, el valor final obtenido es $k = 0.777$.

Esta cantidad será diferente si se realiza un número diferente de iteraciones, sin periodicidad identificada. Esto sucede dentro de los límites que

tienen los mismos sistemas, es decir, ninguna de las trayectorias tenderá a infinito. A diferencia de las otras situaciones mostradas, donde no se espera una desviación en los valores finales de ligeras diferencias en las condiciones iniciales, dos sistemas caóticos se caracterizan por el crecimiento de las diferencias en sus valores finales a medida que pasan las iteraciones. Las trayectorias se comportan de manera diferente si se hace una comparación detallada de ambas figuras.

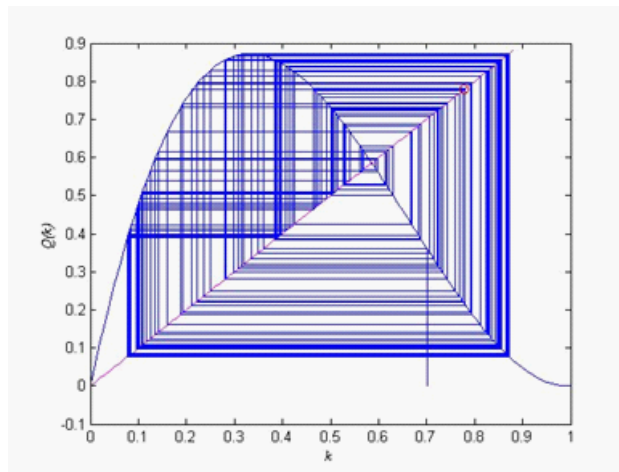


Fig. 4.10 Trayectoria para $v = 3.90$ (densidad inicial $k = 0.701$, valor final $k = 0.777$).

En la figura 4.11 se muestra sus propias características, aproximadamente entre los valores $v = 3.9$ y $v = 4.1$ parece que la periodicidad se recupera para algunos valores periódicos, pero de repente la aperiodicidad aparece de nuevo después de algunas regiones cortas de bifurcaciones que no están bien definidas.

Como se ha demostrado, todos estos comportamientos tienden a depender de la variación de la velocidad v . Cada vez que este parámetro se incrementa, la forma del polinomio (4.9) cambia. Esta condición tiene un límite y es

posible calcular el valor más alto para la velocidad como $v = 4.47$, alcanzado cuando $Q(k_i) = 1$ es el máximo del diagrama fundamental normalizado cuando la densidad es $k \cong 0.331$.

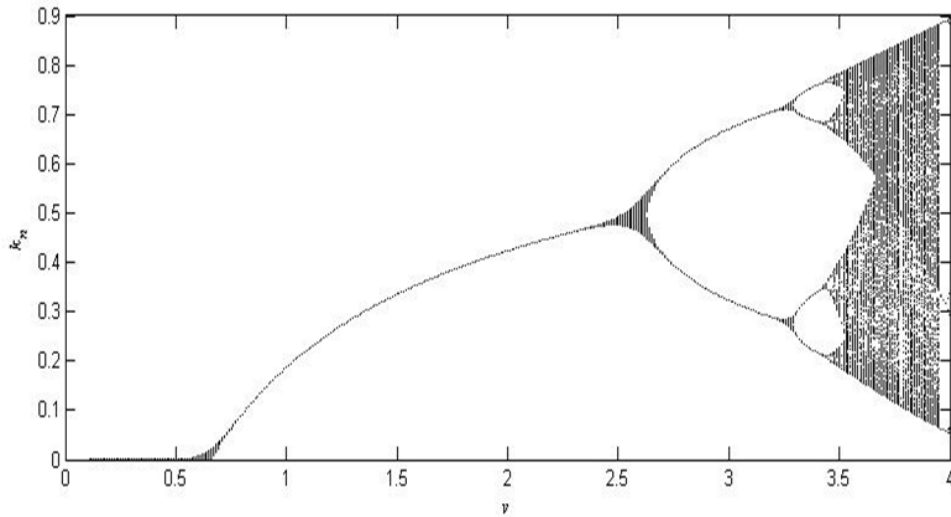


Fig. 4.11 Mapeo Densidad-Flujo cuando velocidad v cambia.

Capítulo 5

Conclusiones

Por último, en este capítulo se exponen las conclusiones del sistema complejo así como las del sistema de tráfico.

Para el sistema complejo una extensión en seis dimensiones del modelo clásico de Lü se expone en el presente documento. Tal extensión se ha conseguido mediante la sustitución en las tres variables del modelo por variables complejas.

El MCEL6D es invariante y por medio de una transformación de coordenadas resulta ser simétrica respecto a los eje z_1 y z_2 . Un esquema del hamiltoniano generalizado ha sido asociado al sistema para analizar la dinámica desde un punto de vista energético. También se muestra que el sistema es disipativo para un rango de $k < a + b$ y es holomorfo.

Para este modelo se presenta también una proyección en cinco dimensiones haciendo una de sus variables complejas cero. Esto resulta en tres posibles versiones de la proyección del MCEL5D.

Bajo la misma idea de reducir el número de variables, se obtienen también las proyecciones del sistema en cuatro dimensiones, pero ahora haciendo dos de sus variables complejas cero. Al igual que en 5D, éstos nos lleva a obtener tres versiones posibles en 4D.

Con base en los espacios-fase, los exponentes de Lyapunov y los mapas de Poincaré de todos aquellos subsistemas que se presentan en esta investigación en 5D y en 4D son caóticos. El modelo clásico de Lü basa su principal análisis sobre dichas medidas, y por ello se considera como un atractor caótico.

Sin embargo, mediante la realización del análisis sobre el modelo en seis dimensiones, o en cinco dimensiones y cuatro dimensiones, se concluye que todos los puntos de equilibrio son localmente inestables y focos-silla en la mayoría de los casos.

Las simulaciones numéricas muestran que el modelo propuesto en seis dimensiones tiene un comportamiento hipercaótico y cuasi-periódico. Debido a este hecho de poseer ambas dinámicas, este sistema parece tener las características de ser un atractor extraño no caótico en ciertas regiones.

Por otro lado, las proyecciones en cinco y en cuatro dimensiones presentan un comportamiento caótico, pero no describen éstas un comportamiento cuasi-periódico. Todo este conjunto de análisis y simulaciones han establecido la dinámica de este sistema propuesto con los valores específicos en sus parámetros. Con el fin de mostrar otro conjunto de comportamientos, el objetivo de la investigación futura será en la variación de los parámetros a fin de obtener los mapas respectivos de Lyapunov.

Para el caso del sistema de tráfico se presenta una aproximación polinómica de tercer grado para obtener un modelo del diagrama fundamental, cuya precisión depende de los puntos importantes de este tipo de representación del comportamiento del tráfico.

Se demostró que para algunos conjuntos de valores de la velocidad v , el comportamiento es estable con los estados que se acercan a un único valor extremo, o a uno con valores periódicos. La periodicidad puede ser sólo de 2 si el parámetro de velocidad v se encuentra en cierto intervalo o de 4 si

este parámetro se incrementa. Se puede encontrar que esta periodicidad se duplica a 8, 16 o más para valores más altos de v . La periodicidad se vuelve tan alta que es imposible de predecir un valor final para dos conjuntos de iteraciones realizadas con pequeñas diferencias en sus condiciones iniciales, por lo que sus trayectorias divergen. Se dice que este modelo se ha convertido en un modelo de tráfico caótico.

Esta transición difusa entre las bifurcaciones, que corresponden a la convergencia oscilatoria como se ha visto, es una característica diferente con respecto al uso del polinomio de segundo grado que es la ecuación logística usada en [32], por ejemplo. El enfoque sugerido del polinomio tiene la ventaja de mostrar los fenómenos oscilatorios convergentes, que se espera en situaciones reales, además de los descritos por el polinomio como se ha mencionado.

Se tiene la ventaja adicional que está estrechamente relacionado con el diagrama fundamental bien conocido en el campo de tráfico, ya que su diseño se basa en los puntos nodales, relacionados con algunos conceptos importantes en la teoría de tráfico. Estos puntos y la aproximación dada por el polinomio de Lagrange de un mayor grado evita una simetría poco realista y se acercan a un diagrama fundamental más familiar.

Existen otras funciones que se aproximan a los datos que representan el diagrama fundamental propuestos por otros investigadores (Greenshields, Greenberg, Underwood, etcétera). La característica común de todos ellos es que toman puntos nodales como base para diseñar y proponer este tipo de modelos, de una manera similar que nuestro polinomio construido. No es extraño entonces que todas las definiciones, los análisis y las simulaciones realizadas aquí se puedan hacer en los otros modelos. Esto es parte de nuestro trabajo futuro en el que nos centraremos.

Parte I

Artículos y Congresos

Artículos Publicados:

1) K. Casas-García, **L. A. Quezada-Téllez**, S. Carrillo-Moreno, J. J. Flores-Godoy y G. Fernández Anaya. Asymptotically stable equilibrium points in new chaotic systems, *Nova Scientia* 8(16), 41-58 (2016).

2) Oscar. A. Rosas-Jaimes, **Luis Alberto Quezada-Téllez** y G. Fernández Anaya. Polynomial Approach and Nonlinear Analysis for Traffic Fundamental Diagram, *PROMET - Traffic & Transportation*, (2016).

Congresos:

1) **L. A. Quezada-Téllez**, J. J. Flores-Godoy y G. Fernández-Anaya. Modelo Complejo Extendido de Lü, *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA* 2014, Oct. 14-17, Cancún, Q. R.

2) Oscar, A. Rosas-Jaimes, **L. A. Quezada-Téllez** y G. Fernández-Anaya. Control Desing for Car-Following Helly's Model, *Memorias del XVI Congreso Nacional de Control Automático CLCA* 2015, Oct. 14-16, Cuernavaca, Morelos.

3) **Luis Alberto Quezada-Téllez**. Schleichende Massen. Alltag in einer Megacity: Unfassbar viel Zeit verbringen die Menschen in Mexiko-Stadt damit von A nach B zu kommen, *Spiegel Wissen*, 2014.

Bibliografía

- [1] Lorenz, E. N.: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20(2),130–141 (1963).
- [2] Chen, G., Ueta, T.: Yet another chaotic attractor. *Int J Bifurcation and Chaos* 9, 1465–1466 (1999).
- [3] Lü, J., Chen, G.: A new chaotic attractor coined. *Int. J. Bifurcat. and Chaos* 12(3), 659–661 (2002).
- [4] Musielak, Z., Musielak, D.: High-dimensional chaos in dissipative and driven dynamical systems. *Int. J. Bifurcat. and Chaos* 19(09), 2823–2869 (2009).
- [5] Rossler, O.: An equation for hyperchaos. *Physics Letters A* 71(2), 155–157 (1979).
- [6] Kapitaniak, T.: On strange nonchaotic attractors and their dimensions. *Chaos, Solitons & Fractals* 1(1), 67–77 (1991).
- [7] Feudel, U., Kuznetsov, S., Pikovsky, A.: *Strange nonchaotic attractors: Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems*, World Scientific, New Jersey, (2006).

- [8] Mahmoud, G. M., Gamal, M., Ahmed, M. E., Mansour, E., Sabor, N.: On autonomous and nonautonomous modified hyperchaotic complex Lü systems. *Int. J. Bifurcat. and Chaos* 21(07), 1913–1926 (2011).
- [9] Gibbon, J., McGuinness, M.: The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers. *Phys D* 5(1), 108–122 (1982).
- [10] Gómez-Mont, X., Flores-Godoy, J. J., Fernández-Anaya, G.: Some attractors in the extended complex Lorenz model. *Int. J. Bifurcat. and Chaos* 23(9), 1–15 (2013).
- [11] Reiterer, P., Lainscsek, C., Schürer, F., Letellier, C., Maquet, J.: A nine-dimensional Lorenz system to study highdimensional chaos. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 31(34), 7121–7139 (1998).
- [12] Rech, P. C.: Delimiting hyperchaotic regions in parameter planes of a 5D continuous-time dynamical system. *Applied Mathematics and Computation* 247, 13–17 (2014).
- [13] Barrio, R., Martínez, M. A., Serrano, S., Wilczak, D.: When chaos meets hyperchaos: 4D Rössler model. *Physics Letters A* 379(38), 2300–2305 (2015).
- [14] Wen-Juan, W., Zeng-Qiang, C., Zhu-Zhi, Y.: Local bifurcation analysis of a four-dimensional hyperchaotic system. *Chinese Physics B* 17(7), 2420–2432 (2008).
- [15] Chen, Y., Yang, Q.: Dynamics of a hyperchaotic Lorenz-type system. *Nonlinear Dynamics* 77(3), 569–581 (2014).

- [16] Mahmoud, G. M., Ahmed, M. E., Mahmoud, E. E.: Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems. *International Journal of Modern Physics C* 19(10), 1477–1494 (2008).
- [17] Bao, B., Xu, J., Liu, Z., Ma, Z.: Hyperchaos from an augmented Lü system. *Int. J. Bifurcat. and Chaos* 20(11), 3689–3698 (2010).
- [18] Mahmoud, G. M., Mahmoud, E. E., Ahmed, M. E.: On the hyperchaotic complex Lü system. *Nonlinear Dynamics* 58(4), 725–738 (2009).
- [19] Zarei, A.: Complex dynamics in a 5-D hyper-chaotic attractor with four-wing, one equilibrium and multiple chaotic attractors. *Nonlinear Dynamics* 81, 585–605 (2015).
- [20] Sira R. H., Cruz H. C.: Synchronization of chaotic systems: a generalized Hamiltonian systems approach. *Int. J. Bifurcat. and Chaos* 11(05), 1381–1395 (2001).
- [21] Barreira, L., Valls, C.: *Complex Analysis and differential equations*, Springer Science & Business Media (2012).
- [22] Fang, T., Sun, J.: Stability analysis of complex-valued nonlinear differential system. *Journal of Applied Mathematics* Article ID 621957, 7 pages (2013).
- [23] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H. L., Vastano, J. A.: Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16(3), 285–317 (1985).
- [24] Institute of Transportation Engineers (ITE) *Traffic Engineering Handbook* 6th ed. Washington DC, (2009).

- [25] Payne H., Models of freeway traffic and control, in *Mathematic Models of Public Systems*. Simulation Council, 1971; 28(1):51–61.
- [26] Daganzo C. F.,: *Fundamentals of Transportation and Traffic Operations*, Pergamon, Elsevier.
- [27] Marušić S.,: Fluid Models in the Traffic Flow Theory, *Promet - Traffic & Transportation* 12(1): 7-14, (2000).
- [28] Chapra S. and Canale R.,: *Numerical Methods for Engineers*, 6th ed. McGraw-Hill, (2009).
- [29] Lo S.-C. and Cho H.-J.,: Chaos and control of discrete dynamic model, *Journal of the Franklin Institute* 342: 839–851, (2005).
- [30] Devaney R. L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, (1987).
- [31] Perko, L.: *Differential equations and dynamical systems*. Vol. 7. Springer Science & Business Media, (2013).
- [32] Thamizh V. A. and Dhivya G.,: Measuring heterogeneous traffic density, *International Journal of Engineering and Applied Sciences* 6(3): 144–148, (2010).
- [33] Kim T. and Zhang H. M.,: An empirical study on gap time and its relation to the fundamental diagram of traffic flow, in *7th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, Washington, D.C., 2004: 94–99.
- [34] Lighthill M. J. and Whitham G. B.,: On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers, *Proc. Royal Soc. A*. 229: 281–316, (1955).

- [35] Richards P. I.,: Shock waves on the highway, *Operation research* 4: 42–51, (1956).
- [36] Holmgren, R. A.,: *A first Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer, N. Y., (1994).
- [37] Greenberg, H., An analysis of traffic flow. *Operations Research* 7: 79-85, (1959).
- [38] Greenshields, B.D.: A study of traffic capacity. *Highway Research Board* 14: 448-477, (1935).
- [39] Ngoc P.H.A., Hieu L.T., On stability of discrete-time systems under nonlinear time-varying perturbations, *Advance in Difference Equations* 2012:120, (2012).