

PROCESOS DE TRANSPORTE VECTORIALES EN LA TERMODINÁMICA
IRREVERSIBLE RELATIVISTA

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por Decreto Presidencial
del 3 de abril de 1981



LA VERDAD
NOS HARÁ LIBRES

UNIVERSIDAD
IBEROAMERICANA

CIUDAD DE MÉXICO ®

“PROCESOS DE TRANSPORTE VECTORIALES EN LA
TERMODINÁMICA IRREVERSIBLE RELATIVISTA”

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Presenta

DOMINIQUE ANNE CELINE BRUN BATTISTINI

Director: Dr. Alfredo Sandoval Villalbaz

Lectores: Dra. Ana Laura García Perciante

Dra. Alma Rosa Méndez Rodríguez

México, D. F.

2014

ÍNDICE

Capítulo I.	
Introducción.....	2
Capítulo II.	
Descripción fenomenológica de la termodinámica irreversible.....	5
Capítulo III.	
Formalismo de la teoría cinética.....	14
A. Formalismo de la teoría cinética clásica (no relativista).....	14
B. Formalismo de la teoría cinética relativista.....	18
C. La ecuación constitutiva para el flujo de calor.....	22
D. La aproximación BGK.....	24
E. Método del análisis de fluctuaciones.....	24
Capítulo IV.	
Causalidad y Dispersión Rayleigh-Brillouin.....	26
A. Ecuaciones de transporte para fluctuaciones en el régimen de Euler.....	27
B. El espectro de Rayleigh-Brillouin.....	33
Capítulo V.	
Ley de Tolman para sistemas fuera de equilibrio.....	42
Capítulo VI.	
Producción de entropía: Cálculo fundamentado en la teoría cinética relativista.....	49
A. Cálculo de la producción de entropía según el enfoque fenomenológico, caso no relativista.....	49
B. Cálculo de la producción de entropía en el caso no relativista, según el enfoque de la teoría cinética.....	51
C. Cálculo de la producción de entropía en presencia de fuerzas externas en relatividad especial, según el enfoque de la teoría cinética.....	54
Capítulo VII.	
Consideraciones finales.....	62
Apéndices.	
A. Lista de términos más usados.....	67
B. Kernel colisional.....	68
C. Conceptos básicos de análisis tensorial.....	69
D. La función de distribución de Jüttner y la de Maxwell-Boltzmann.....	71
E. Derivadas parciales de las funciones de Maxwell-Boltzmann y de Jüttner.....	71
F. Las ecuaciones de Euler relativistas.....	72
G. Analogía con el caso electromagnético.....	73

H. Demostración de $\nabla^2 R_0 = 0$	74
I. Cálculo de la relación de dispersión correspondiente al espectro de Rayleigh-Brillouin en presencia de la ecuación constitutiva modificada para el flujo de calor.....	75
J. Gravedad linealizada.....	77
K. Resolución de la integral (142).....	80
L. Acerca de la parabolicidad de la ecuación de calor.....	81
M. Ecuación de Boltzmann en relatividad general.....	82
Referencias.....	83

Director: Dr. Alfredo Sandoval Villalbaz

Lectores titulares:

Dra. Ana Laura García Perciante

Dra. Alma Rosa Méndez Rodríguez

Lectores suplentes:

Dr. Guillermo Chacón Acosta

Dr. Víctor Pérez Abreu

I. INTRODUCCIÓN

Un fluido se define como un medio material continuo perfectamente deformable; también como aquel cuerpo físico que no pone resistencia a los esfuerzos cortantes, identificados como la componente de fuerza tangente a una superficie. Un fluido puede presentarse como gas, líquido o plasma. Existen diferentes maneras de clasificarlo: según el número de componentes, las dimensiones, la presencia o ausencia de viscosidades, la velocidad de sus moléculas, la compresibilidad, entre otros criterios. Si se desea incluir en esta clasificación la velocidad de las moléculas que conforman el fluido, se deberá clasificar a los fluidos en relativistas y no relativistas, siendo los primeros, aquellos cuyas partículas se mueven a velocidades cercanas a la de la luz. El parámetro relativista $z = \frac{k_B T}{mc^2}$, con k_B la constante de Boltzmann, T la temperatura, m la masa de la partícula y c la rapidez de la luz, permite reconocer un fluido relativista de uno que no lo es; si es igual o mayor a 1 se habla de régimen relativista y para valores de $z \gg 1$, de ultrarelativista. Los fluidos relativistas se caracterizan por sus altas temperaturas, por ejemplo, en el caso de un gas de electrones, se tendrán temperaturas de alrededor de $10^7 K$ (Kelvin). En relatividad, existen dos enfoques, el de la relatividad especial y el de la general. En esta tesis se estudiará el caso de fluidos relativistas monocomponentes o simples (una sola especie química), despreciando las viscosidades y bajo la óptica de la relatividad especial. No se tomarán en cuenta efectos cuánticos: se habla entonces de un fluido no degenerado. Además, se estudiará el caso de fluidos diluidos, que son aquellos en los cuales las colisiones se limitan a pares de partículas ya que la probabilidad de una colisión entre tres partículas o más es muy baja. Una manera común de describir cuan diluido es un fluido se sustenta en el parámetro de Knudsen, que se define como $\epsilon = \frac{\lambda}{L}$, donde λ es el camino libre medio de las moléculas del fluido y L es la longitud característica del recipiente que lo contiene. Cuando $\epsilon \ll 1$, se habla de un fluido en régimen colisional o hidrodinámico [1, 2]. Si las partículas han colisionado binariamente algunas veces, esto es, entre 5 y 10 veces, a partir de un estado inicial, el sistema se encuentra en este régimen.

Los primeros trabajos que tuvieron que ver con la hidrodinámica relativista se remontan a los de Eckart [3] en 1940 y a la sección de fluidos relativistas incluida en el texto de mecánica de fluidos de Landau-Lifshitz [4]. Se han encontrado serias dificultades asociadas al uso de la ecuación constitutiva para el flujo de calor de Eckart [5], en particular en cuanto a que genera soluciones que crecen exponencialmente y que no son causales. En el 2009 fue propuesto un

formalismo alternativo [6]. La contribución de este estudio es la utilización del mismo en el análisis de la causalidad, del flujo de calor y de la producción de entropía en fluidos simples relativistas inmersos en campos externos. La importancia de este análisis consiste en poner en evidencia la ventaja de usar un formalismo a primer orden en los gradientes que es deducido desde primeros principios y que, hasta donde se ha estudiado, no presenta los inconvenientes del formalismo de Eckart.

El interés por la teoría de transporte relativista se ha incrementado debido a la detección de plasmas de altas temperaturas generados en dispositivos como el *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC). En este contexto se han realizado experimentos que involucran colisiones entre iones pesados y se han generado plasmas electrón-positrón. En estos escenarios, un fluido en el régimen de Euler (aquel en el que se desprecian viscosidades y fuerzas externas) resulta ser una buena aproximación para eventos que involucran colisiones entre iones de oro [7]; además, se han desarrollado generalizaciones que toman en cuenta datos experimentales recientes [8]. Por otro lado, sigue siendo de sumo interés la aplicación que tiene la hidrodinámica relativista en el campo de la astrofísica y en particular en la cosmología [9].

Los capítulos en los que se divide el presente trabajo son los siguientes:

II) Descripción fenomenológica de la Termodinámica Irreversible, donde se describen sus fundamentos en el régimen lineal.

III) Formalismo de la teoría cinética, que abarca las ecuaciones básicas tanto del régimen clásico como del relativista, mismas que se utilizarán a lo largo de esta tesis.

IV) Dispersión de Rayleigh-Brillouin y causalidad, que aborda el tema, a nivel de fluctuaciones, del principio de antecendencia. Se demuestra que éste no se viola en el régimen de Euler y, al utilizar la ecuación constitutiva modificada para el flujo de calor, tampoco en el de Navier-Stokes. El estudio realizado a nivel Euler se encuentra en la referencia [10] y el que aborda la causalidad en el régimen de Navier-Stokes en la referencia [11].

V) Ley de Tolman para sistemas fuera de equilibrio, donde se muestra una deducción de la ley de Tolman relativista fuera del equilibrio, regresando a la tradicional ley de Tolman deducida en 1930, en el límite clásico, para sistemas en equilibrio. Este análisis fue publicado en la referencia [12].

VI) Producción de entropía; cálculo fundamentado en la teoría cinética relativista, que presenta el cálculo de la producción de entropía (calor no compensado de Clausius) en

presencia de un campo gravitacional linealizado, siguiendo argumentos de teoría cinética y expresándola en función de los gradientes de la temperatura, de la densidad de partículas y del potencial gravitacional. La producción de entropía en presencia de un campo gravitacional linealizado fue publicado en la referencia [13] y en presencia de un campo electrostático en la referencia [14].

VII) Consideraciones finales, donde se retoman los resultados presentados, se analizan a la luz de la aportación de la teoría cinética y se establecen las líneas de futuras investigaciones.

Apéndices, que incluyen cálculos detallados de interés; excepto el apéndice A que es una lista de los símbolos más usados.

Referencias bibliográficas y hemerográficas.

II. DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA DE LA TERMODINÁMICA IRREVERSIBLE

Un sistema termodinámico se define como una porción delimitada del universo, sus límites pueden ser físicos o imaginarios; si existe transferencia de materia a través de los límites de confinamiento y el resto del universo, se dice que el sistema es abierto; de lo contrario, cerrado. Un sistema se dice *en equilibrio termodinámico* cuando las variables termodinámicas macroscópicas con las cuales se caracteriza el mismo, no varían en el tiempo. La termodinámica irreversible, también llamada *termodinámica fuera del equilibrio* estudia los sistemas macroscópicos sujetos a procesos fuera del equilibrio. La mayor parte de los procesos que ocurren en la vida diaria son de este tipo, por ejemplo, la combustión del motor de un automóvil, la dispersión de luz a través de un fluido, las reacciones químicas, los efectos cruzados como el termoeléctrico, etc...

En este contexto, se suele trabajar en sistemas que se encuentran *cerca del equilibrio*, haciendo uso de conceptos de la termostática y de la hipótesis de equilibrio local (descrita más adelante), con una aproximación lineal. Un sistema se considera *cerca del equilibrio* cuando sólo una fluctuación lo separa del mismo; esto es, una modificación que temporalmente altera el valor de alguna variable termodinámica en equilibrio, en una magnitud relativamente pequeña.

La Termodinámica Irreversible se basa en las tres leyes fundamentales de la termostática, ampliamente conocidas [1, 15]:

- La ley cero, que puede expresarse como sigue: *Si de tres sistemas A, B y C, resulta que A y B se encuentran, separadamente, en equilibrio con C, entonces A y B se encuentran en equilibrio uno con el otro*; a partir de este principio se define la temperatura que es la variable termodinámica que tendrá el mismo valor en estos tres sistemas y que es una función de las variables independientes. En un fluido la temperatura depende de la presión local y del volumen, así pues, para todo fluido, es posible encontrar una función $T(p,V)$, llamada *temperatura*, que tiene la propiedad de tener un valor numérico idéntico para todos aquellos fluidos en equilibrio uno con el otro. Debido a que la temperatura depende de la presión y del volumen, el fluido puede describirse en términos de la presión y el volumen, de la presión y la temperatura o bien del volumen y de la temperatura.

- La primera ley de la termodinámica, donde se define la energía interna como aquella función de estado [1, 15] cuyo incremento entre dos estados en equilibrio, a y b , a través de un proceso adiabático se expresa como sigue:

$$\Delta U = - \int_a^b \delta W_{adiab}, \quad (1)$$

donde W_{adiab} es el trabajo adiabático (sin transferencia de calor). Si el proceso no es adiabático, se satisface la siguiente relación:

$$dU - \delta W = \delta Q, \quad (2)$$

que permite expresar la primera ley de este modo: *En todo proceso en la naturaleza, la energía se conserva si se toma en cuenta el calor.* La ecuación (2) establece que un proceso no puede tener como único fin el crear o destruir energía.

- La segunda ley de la termodinámica define al estado más probable de un sistema como aquel cuya entropía alcanza un valor máximo. Otra manera de expresar la segunda ley es la siguiente: Si se efectúa un proceso entre dos estados en equilibrio de un sistema aislado, la diferencia entre las entropías de los estados inicial y final nunca puede disminuir. La segunda ley nos indica la dirección posible de un proceso en un sistema; la diferencia de entropías entre dos estados establecerá un indicador que decidirá la posibilidad de un proceso. Lord Kelvin expresó la segunda ley de la termodinámica como sigue: *Toda transformación cíclica cuya única finalidad sea absorber calor de un cuerpo o fuente térmica a una temperatura dada y convertirlo íntegramente en trabajo, es imposible* [16]. Se puede demostrar que si A y B representan dos estados de equilibrio de un sistema, el valor de la integral $\int_A^B \frac{d'Q_{rev}}{T}$ será el mismo para cualquier trayectoria de procesos reversibles cuasiestáticos entre los puntos A y B , $d'Q_{rev}$ es la cantidad de calor intercambiada entre el sistema y la fuente de temperatura T , tiene el subíndice *rev* para indicar que la relación es válida para procesos reversibles [16]. Un proceso es cuasiestático cuando el paso del estado A al estado B se realiza cambiando los parámetros continua y lentamente (comparado con tiempos de relajación significativos) de modo que siempre pueda considerarse el sistema en estado de equilibrio. Teniendo en cuenta el enunciado previo, se define la diferencia de entropías como:

$$\Delta S = S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{d'Q_{\text{rev}}}{T}. \quad (3)$$

Para cualquier proceso (irreversible o reversible) entre A y B se cumple que [16, 17]:

$$\Delta S \geq \int_A^B \frac{d'Q}{T}, \quad (4)$$

esta integral será mayor a cero cuando el proceso sea irreversible, igual a cero para procesos reversibles y menor a cero para procesos imposibles.

Por otro lado, la ecuación de Gibbs, fundamental en termodinámica, relaciona la primera y segunda leyes de la termodinámica de la siguiente manera [16, 17]:

$$dU = TdS + dW, \quad (5)$$

donde el calor se expresó en función de la entropía y la temperatura. La ecuación (5) puede re-escribirse en términos de variables de estado Z y Y como

$$dU = TdS + \sum Z_i dY_i. \quad (6)$$

Estas tres leyes son universales ya que son válidas en cualquier sistema. Para mayor información al respecto de estos conceptos básicos se puede consultar cualquier texto de termodinámica clásica, como por ejemplo las referencias [16] y [17]. Las leyes se expresaron en términos macroscópicos, nunca se hizo referencia a la naturaleza microscópica del sistema, es decir, no se tocó el tema de las propiedades de las moléculas que constituyen el sistema o las fuerzas de interacción entre ellas. Una ecuación que establece la conexión entre las definiciones macroscópicas y microscópicas es la siguiente [16, 17]:

$$S = k_B \ln f, \quad (7)$$

donde f indica la probabilidad de encontrar un sistema caracterizado con ciertos parámetros. La ecuación (7) permite relacionar las variables mencionadas en las leyes de la termodinámica con la teoría microscópica de la materia.

Al analizar *sistemas fuera del equilibrio*, la Termodinámica Irreversible Lineal (TIL) supone cuatro hipótesis [15, 18]:

- **Hipótesis de equilibrio local.** Un sistema fuera de equilibrio, con un volumen V y una medida macroscópica L se puede dividir en elementos de volumen llamados comúnmente *celdas*, de dimensión l . La dimensión de estas celdas es mucho menor que la dimensión L del sistema pero a la vez mucho mayor que las dimensiones atómicas. Las variables termodinámicas macroscópicas se pueden definir unívocamente para cada coordenada (\vec{r}, t) en cada una de estas celdas; además, la magnitud de las derivadas de estas variables en el tiempo y en el espacio definen la forma en que el sistema se aleja del equilibrio.

Si un sistema está fuera de equilibrio, cada una de las celdas está en equilibrio termodinámico, lo que quiere decir que la relación funcional que existe entre las variables termodinámicas en equilibrio permanece sin cambio. A este concepto se le denomina la *hipótesis de equilibrio local*. En otras palabras, las relaciones que existen entre las variables termodinámicas en equilibrio, localmente, son las mismas que para las variables fuera del equilibrio. Un sistema se encuentra en equilibrio -termodinámico- local cuando sus parámetros pueden variar en el espacio y en el tiempo, pero esta variación es lo suficientemente lenta como para poder suponer que existe una zona que lo rodea, en donde ese sistema está en equilibrio.

- **Generalización de la segunda ley de la termodinámica a procesos fuera del equilibrio.** La entropía no obedece una ecuación de conservación sino una de evolución, esto es, se produce entropía; este hecho se expresa por la ecuación [15, 17, 18]:

$$\frac{\partial(ns)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_s = \sigma, \quad (8)$$

incremento	divergencia	producción
de la entropía	+ del flujo de	de
por unidad de tiempo	entropía	entropía.

En la ecuación (8), s representa la entropía por partícula. Esta producción de entropía es lo que Clausius [19] llamó calor no compensado, por lo que se le suele llamar también el *calor no compensado de Clausius*. En el capítulo VI se describe ampliamente esta generalización. Resulta importante indicar en este momento que la producción de entropía puede expresarse como la sumatoria de los productos de flujos por los gradientes de las variables termodinámicas locales que los provocan. Estos gradientes se suelen llamar fuerzas termodinámicas, lo que se expresa matemáticamente como sigue [15, 17, 18]:

$$\sigma = \sum \vec{J}_i \cdot \vec{X}_i, \quad (9)$$

donde \vec{J}_i es el i -ésimo flujo, que puede ser de calor, de masa, de ímpetu, y \vec{X}_i es el gradiente de la variable que provoca el flujo correspondiente, estos es, gradiente de temperatura, de potencial químico, de velocidad. Por ejemplo, un término de la producción de entropía puede escribirse como el producto del flujo de calor por el gradiente de la temperatura.

- **Ecuaciones constitutivas lineales.** En el régimen lineal, si hay n procesos efectuándose en un sistema, la relación entre los flujos y sus fuerzas asociadas es lineal, lo que se puede escribir como [15, 17, 18]:

$$\vec{J}_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} \vec{X}_k, \quad (10)$$

donde los coeficientes cinéticos o de transporte L_{ik} , son escalares, y las fuerzas X_k son independientes entre sí. Los coeficientes L_{ik} dependen de las propiedades en equilibrio. Cabe aclarar que la relación anterior sólo tiene sentido en presencia de campos externos o gradientes de variables locales. Esta manera de escribir los flujos es útil para reescribir la entropía en dichos términos:

$$\sigma = \sum_i \sum_k L_{ik} \vec{X}_i \cdot \vec{X}_k. \quad (11)$$

Claramente, para que la producción de entropía sea semidefinida positiva, debe cumplirse que:

$$L_{ik} \geq 0. \quad (12)$$

En sistemas isotrópicos, cada una de las ecuaciones (10) debe satisfacer *el principio de Curie* que estipula que flujos y fuerzas únicamente pueden acoplarse si son de la misma naturaleza tensorial (un vector es un tensor de rango 1).

- **Simetría de las relaciones de reciprocidad de Onsager.** Tres ecuaciones de balance forman el sistema de ecuaciones diferenciales que rige la dinámica de un fluido simple: la ecuación de continuidad (conservación del número de partículas), la de conservación del ímpetu y la de conservación de la energía. Se trata pues de un sistema con más incógnitas que ecuaciones. Las incógnitas son la densidad de partículas (n), la temperatura (T), las tres componentes de la velocidad hidrodinámica ($\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y, \mathcal{U}_z$), la densidad de energía (e), las tres componentes del flujo de calor y, si no se desprecian las viscosidades, se tendrán las seis componentes del tensor de esfuerzos. En un fluido isotrópico el tensor de esfuerzos puede escribirse como [4, 15, 18]:

$$\boldsymbol{\tau} = pI + \boldsymbol{\tau}^v, \quad (13)$$

donde I es la matriz identidad, p la presión hidrostática y a $\boldsymbol{\tau}^v$ se le denomina tensor viscoso.

Para resolver este sistema necesitamos ecuaciones adicionales, a saber, las ecuaciones constitutivas. En los capítulos posteriores, donde se aborda el tema de fluidos al despreciar los términos viscosos, se usan algunas de las opciones existentes para la ecuación constitutiva del flujo de calor.

Para expresar el conjunto de ecuaciones constitutivas en forma matricial, es posible escribir una matriz de coeficientes de transporte de elementos L_{ik} . Si esta matriz es diagonal, el sistema de ecuaciones diferenciales es completo. Esta es justamente la hipótesis de reciprocidad de Onsager [15, 18]:

$$L_{ik} = L_{ki}, \quad (14)$$

es decir, que los coeficientes de transporte son simétricos. Así pues, las ecuaciones de balance, las ecuaciones constitutivas lineales (10) y la hipótesis de reciprocidad de Onsager (14), junto

con las condiciones iniciales y de frontera, permiten predecir el comportamiento del sistema en el tiempo.

Las variables consideradas para el sistema simple, materia de este análisis, son la temperatura (T), la densidad de partículas (n) y la velocidad hidrodinámica del fluido (\vec{U}). La densidad de partículas es una magnitud intensiva que describe el grado de concentración de objetos que se pueden contar (partículas, moléculas, galaxias, etc...). Cabe recordar que una magnitud intensiva es aquella cuyo valor es independiente del tamaño del sistema o de la cantidad de materia en dicho sistema. La velocidad hidrodinámica del fluido se define como el promedio de las velocidades de cada partícula \vec{v} ; es una velocidad característica como “la velocidad del centro de masa del sistema”.

Se mencionó con anterioridad que en la TIL se suele trabajar con una aproximación lineal. Lo que sucede es que las ecuaciones de evolución temporal que describen la dinámica de un fluido son complicadas de resolver puesto que *no son lineales*. De hecho sólo se han logrado obtener pocas soluciones analíticas exactas en condiciones particulares [20, 21]. Para enfrentar esta situación se suele utilizar el *análisis de las fluctuaciones*, descrito en el capítulo siguiente. Lo que es importante recalcar es que la concordancia entre los datos experimentales y los resultados teóricos de la teoría lineal es asombrosa [15], por lo que dicho método se sigue registrando en la literatura especializada. Resulta necesario advertir que, aunque la TIL es una herramienta poderosa para abordar problemas termodinámicos fuera del equilibrio, existen muchos de esos sistemas que no pueden analizarse con ella, tal es el caso de las ondas de choque, el flujo de líquidos poliméricos, la transición vítrea, entre otros [15].

Las ecuaciones que rigen la dinámica de los fluidos se pueden establecer desde diferentes perspectivas. La teoría cinética de los gases, materia de estudio del capítulo siguiente, es la herramienta utilizada en esta investigación para tal efecto. Establece sus conclusiones a partir de primeros principios, sin olvidar el significado físico de las magnitudes; se basa en las teorías microscópicas de la materia y el uso de funciones de distribución. Sin embargo, existen enfoques alternativos que se han venido utilizando para analizar los sistemas termodinámicos. Uno de ellos es el enfoque fenomenológico, que se basa en razonamientos empíricos; su punto de partida son las leyes de conservación. La segunda ley de la termodinámica es usada para obtener ecuaciones constitutivas. Entre los principales exponentes de la fenomenología en el régimen relativista se encuentran Eckart [3], Israel [22] y de Groot

[23].

Existe también el enfoque racionalista, que usa la fenomenología pero se basa en axiomas matemáticos que, en general, tienen que ver con propiedades matemáticas de las derivadas. Una de las principales controversias con la teoría cinética la constituye el hecho de si el calor puede considerarse una variable de estado o no. Los principales racionalistas son Muschik [24], Möller [25] y Lavenda [26].

Otra perspectiva corresponde a la termodinámica extendida que, a través de parámetros ajustables, resuelven los problemas de estabilidad y causalidad mencionados. Entre los defensores de este formalismo se encuentran Casas-Vázquez, Jou [27, 28] y Andersson [29]. Un análisis detallado se encuentra en el capítulo IV y en la referencia [30].

Entre los enfoques basados en la teoría cinética, el método de Chapman y Enskog establece una jerarquía para las soluciones, basado en un parámetro de orden que se suele identificar con el número de Knudsen definido anteriormente. Así, se tiene que para el régimen de Euler, la solución es $f = f^{(0)}$, para el de Navier-Stokes es $f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)}$, para el de Burnett $f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)}$, y así sucesivamente. La función de distribución en equilibrio es $f^{(0)}$, la corrección a primer orden en los gradientes es $f^{(1)}$, la corrección a segundo orden es $f^{(2)}$. En los capítulos siguientes se analizan los fenómenos de transporte guardando la aproximación de primer orden en los gradientes. En 1985, Hiscock y Lindblom [5] analizan las soluciones divergentes -mencionadas anteriormente- que aparecen al utilizar, como ecuación constitutiva para el flujo de calor, la propuesta por Eckart en 1940 y concluyen que se deben abandonar las teorías a primer orden en los gradientes. Sugieren como salida las teorías extendidas, del tipo descrito por Israel-Stewart [22, 31]. Lo novedoso del formalismo alternativo para la ecuación constitutiva del flujo de calor -al que se ha hecho referencia- es que, con el método de Chapman y Enskog, en el régimen de Navier-Stokes, considerando los gradientes de las variables termodinámicas locales a primer orden, se obtienen soluciones estables (no divergentes) para la evolución temporal de las fluctuaciones. Adicionalmente, dichas soluciones exhiben un comportamiento ondulatorio amortiguado, por lo que no presentan problemas de causalidad. Se evita así el uso de parámetros ajustables, propio de las teorías extendidas y se presenta un cálculo sencillo, derivado de los principios de la teoría cinética.

También se encuentran enfoques basados en teoría cinética, que utilizan el método de Grad [32], que se fundamenta en la hipótesis de que la función de distribución utilizada es

una desviación de la de Maxwell-Boltzmann, o en todo caso de la de Jüttner en el régimen relativista. Dicha desviación se escribe como una serie de términos que son funciones ortonormales: los polinomios tensoriales de Hermite. Se habla del desarrollo en serie de momentos. Sin embargo, se puede demostrar que este método presenta inconsistencias a órdenes superiores a 1 en el parámetro de Knudsen [33].

III. FORMALISMO DE LA TEORÍA CINÉTICA

A. Formalismo de la teoría cinética clásica (no relativista)

La teoría cinética de los gases constituye la base microscópica de la termodinámica irreversible, y con esta teoría es posible obtener el sistema de ecuaciones de transporte y las ecuaciones constitutivas necesarias para el estudio de la dinámica de los fluidos, mismas que se explicarán más adelante.

Una ecuación de transporte es una ecuación del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} + \nabla \cdot (\vec{J}_{\mathcal{F}}) = \ddot{s}, \quad (15)$$

donde \mathcal{F} es la cantidad que evoluciona en un fenómeno de transporte, $\vec{J}_{\mathcal{F}}$ es el flujo que lo transporta y \ddot{s} es la fuente. Las ecuaciones de transporte siempre expresan el balance de una cantidad física.

La ecuación de Boltzmann que en el caso no relativista está dada por [1, 4, 34]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \ddot{s}, \quad (16)$$

es una ecuación que describe la evolución de la función de distribución (f) de una partícula en un gas diluido. Por gas diluido se entiende uno cuyas moléculas colisionan binariamente, es decir, el tipo de colisión más probable es entre pares de moléculas, despreciando los que involucran un mayor número. Esta ecuación indica que el cambio en la función f por el arrastre de las partículas, en un volumen $d\vec{r}d\vec{v}$ del espacio fase, con \vec{v} la velocidad molecular, es igual al término fuente que en lugar de \ddot{s} se escribirá como $J(ff')$, que denota cambios en f debido a las colisiones que sufren las moléculas de masa m . La ecuación de Boltzmann es no lineal, debido a este término colisional. La fuerza externa ejercida sobre el sistema es \vec{F} . Esta ecuación sólo es válida para gases monoatómicos. Sea ϑ la velocidad relativa ($\vartheta = |\vec{v}' - \vec{v}'_1| = |\vec{v} - \vec{v}_1|$ por el principio de reversibilidad [18]), ι la sección transversal de la colisión entre un par de partículas y Ω el ángulo sólido correspondiente a la colisión, entonces el término colisional puede expresarse como sigue [1, 34]:

$$J(ff') = \int \int (f' f'_1 - f f_1) \vartheta \iota d\Omega d\vec{v}_1, \quad (17)$$

donde las primas denotan las cantidades después de la colisión y el subíndice 1 indica la molécula con velocidad v_1 (variable de integración) que interactúa con las moléculas de velocidad v , esto se suma sobre todos los posibles valores de v_1 . La ecuación (17) representa

un balance del número de partículas que entran y salen, por colisiones, de una región del espacio fase (ver apéndice B). El producto de las dos funciones de distribución implica el hecho de que se trata de eventos estadísticamente independientes.

El uso de la ecuación de Boltzmann para describir la dinámica de un fluido proviene de la metodología de la teoría cinética, que establece su análisis a partir de calcular promedios sobre funciones de distribución. El conocimiento de la función de distribución f nos permite calcular las funciones termodinámicas, el flujo de calor, el tensor de esfuerzos y otras magnitudes físicas. En el caso no relativista, $f^{(0)}$ es la función de Maxwell-Boltzmann, denotada muchas veces por $f_{NR}^{(0)}$ y expresada a continuación en función de las velocidades:

$$f_{NR}^{(0)} = n(\vec{r}, t) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\vec{r}, t)} \right)^{3/2} e^{\left(-\frac{m}{2k_B T(\vec{r}, t)}\right)(\vec{v}-\vec{u})^2}, \quad (18)$$

donde, el super-índice (0) indica que es la función de distribución en equilibrio, k_B es la constante de Boltzmann, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ es la velocidad de la molécula, m la masa de la misma, n la densidad de partículas y $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ la velocidad hidrodinámica del elemento de fluido. Es importante puntualizar que la velocidad hidrodinámica está definida localmente, en cada celda que se supone en equilibrio. La función $f_{NR}^{(0)}$ es la solución de la ecuación homogénea de Boltzmann, esto es, haciendo $J(ff') = 0$. La ecuación de Boltzmann se ha intentado resolver a través de diferentes métodos. Una manera de aproximar la solución y que permite calcular promedios de las variables termodinámicas, expresados según el orden del parámetro de Knudsen, es el desarrollado en primera instancia por Hilbert y aplicado por Enskog y Chapman en el caso de un fluido [1, 34]. El método consiste en suponer que f , la solución de la ecuación de Boltzmann, se puede expresar como una serie de potencias de esta forma:

$$f = \epsilon^0 f^{(0)} + \epsilon^1 f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots, \quad (19)$$

donde ϵ es el parámetro de Knudsen que, como ya se observó anteriormente, viene dado por el cociente entre el camino libre medio λ y L la longitud característica del sistema que contiene al gas. Si la serie se trunca en el primer término, se tiene que $f = \epsilon^0 f^{(0)}$, es decir, el fluido se encuentra en el denominado régimen de Euler, donde no se toman en cuenta viscosidades ni transferencia de calor. Si se considera también el segundo término, el fluido se encuentra en el régimen de Navier-Stokes, en presencia de viscosidades y conducción de calor; esto es debido a que el término $f^{(1)}$ contiene la corrección, a primer orden en los gradientes, de la función de distribución en equilibrio $f^{(0)}$, que da origen a los flujos disipativos [1, 34]. Si se trunca

la serie en el tercer término se dice, como se describió en el capítulo anterior, que el fluido está en el régimen de Burnett, y para términos superiores se habla del régimen de super Burnett. El parámetro de Knudsen es una medida de los gradientes espaciales presentes en el sistema: en cada corrección a la función de equilibrio aparece un término con gradiente (de temperatura, o de otra variable), esto es, para la primera corrección ($f^{(1)}$) aparece un gradiente, si se trunca la ecuación (19) al segundo orden en el parámetro de Knudsen, se obtendrán términos a segundo orden en los gradientes y así sucesivamente.

La utilidad del método de Chapman y Enskog es la de convertir la ecuación de Boltzmann en otra ecuación, estrictamente integral (ya no integro-diferencial), posibilitándose el cálculo de promedios estadísticos de las variables termodinámicas. Se habla entonces de la *ecuación de transporte de Enskog* que, en ausencia de fuerzas externas, se escribe a continuación [1, 18, 34]:

$$\frac{\partial(n \langle \psi \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot n \langle \vec{v} \psi \rangle - \dot{\vec{v}} n \cdot \langle \frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}} \rangle = \Delta \psi, \quad (20)$$

donde $\Delta \psi$ está definido en la referencia [1]. Cuando ψ es una cantidad conservada en procesos colisionales, la ecuación (20) se simplifica a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial(n \langle \psi \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(n \langle \vec{v} \psi \rangle)}{\partial \vec{r}} = 0. \quad (21)$$

En el caso no relativista el promedio de ψ está definido por:

$$\frac{1}{n} \int \psi f d\vec{\zeta}, \quad (22)$$

donde $\vec{\zeta}$ es la velocidad caótica de las partículas que viene dada por la expresión

$$\vec{\zeta} = \vec{v} - \vec{u}, \quad (23)$$

que se encuentra en la exponencial de la expresión (18). La velocidad caótica, también llamada “peculiar” es la velocidad de las partículas medida desde el sistema comóvil [35].

Como es bien sabido, las cantidades clásicas conservadas en procesos colisionales son [34, 36]:

- $\psi = 1$, con lo que se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}) = 0. \quad (24)$$

- $\psi = m\vec{v}$, con lo que se obtiene la ecuación de balance de ímpetu:

$$\frac{\partial(nm\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = 0, \quad (25)$$

donde $\overleftrightarrow{T} = m \int \vec{v}\vec{v}f d\vec{v}$ es el tensor de esfuerzos [34].

- Y por último, la cantidad $\psi = \frac{1}{2}mv^2$, con lo que se obtiene la ecuación de balance de energía:

$$\frac{\partial(ne)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_e = 0, \quad (26)$$

donde \vec{J}_e es el flujo *total* de energía, definido como $\vec{J}_e = \frac{1}{2} \int mv^2\vec{v}f d\vec{v}$ y e la densidad de energía por partícula.

Al utilizar las definiciones de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann, la ecuación de continuidad, la velocidad caótica y usando la hipótesis de equilibrio local, se obtiene un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales que constituyen las ecuaciones de transporte para un fluido no relativista [37].

Por otro lado, siguiendo el desarrollo reportado en la Ref. [36], es evidente, y será de mucha utilidad para aplicar estas ideas al régimen relativista, que la transformación (23) puede también expresarse como:

$$v^\mu = G^{\mu\nu} \varsigma_\nu, \quad (27)$$

donde $G^{\mu\nu}$ es la matriz de transformación galileana, definida como:

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{u_x}{c} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{u_y}{c} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{u_z}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

por otro lado, v^μ y ς_ν tienen respectivamente las componentes:

$$v^\mu = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ c \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\varsigma_\nu = \begin{pmatrix} \varsigma_x \\ \varsigma_y \\ \varsigma_z \\ -c \end{pmatrix}. \quad (30)$$

B. Formalismo de la teoría cinética relativista

A partir de esta sección muchas expresiones se escribirán usando notación tensorial, con subíndices para los tensores covariantes y superíndices para los contravariantes. Las letras latinas para los índices toman los valores 1, 2, 3 y las letras griegas los valores 1, 2, 3, 4. Una coma, representa una derivada parcial; y, un punto y coma, una derivada covariante (ver apéndice C para conceptos básicos de análisis tensorial).

Ahora bien, en el caso relativista, en lugar de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann, que acepta velocidades moleculares infinitas, debe usarse la función de distribución de Jüttner (ver apéndice D), denotada por $f_{RE}^{(0)}$ y expresada como [34]:

$$f_{RE}^{(0)} = \frac{n}{4\pi c^3 z \mathcal{K}_2(1/z)} e^{\left(\frac{\mathcal{U}^\beta v_\beta}{zc^2}\right)}, \quad (31)$$

donde $\mathcal{U}^\beta = \gamma_{(u)}(\vec{\mathcal{U}}, c)$ es la cuadrivelocidad hidrodinámica (cuatro componentes), $\gamma_{(u)} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ es el factor de Lorentz y $z = \frac{k_B T}{mc^2}$ es el parámetro relativista. Cuando $z \ll 1$, se trata de un sistema en régimen no relativista pues la energía térmica de la partícula es mucho menor que su energía en reposo. Se dice que para $z \gg 1$ el sistema es ultrarelativista, donde la energía en reposo de la partícula es mucho menor que su energía térmica; puede tratarse de un gas de electrones, por ejemplo, cuya masa es muy pequeña y tiene una temperatura muy alta [38]. El factor $\mathcal{K}_2(1/z)$ denota la función de Bessel modificada de segundo orden.

Las figuras 1a, 1b y 1c, donde se muestran las relaciones $f(\tilde{w})$ vs \tilde{w} , denotando por \tilde{w} la velocidad caótica tanto en el caso no relativista como relativista (este último se definirá más adelante), muestran ambas distribuciones para diferentes valores de z , mostrando cómo a medida que este parámetro aumenta, la diferencia entre ambas distribuciones se torna significativa.

Figura 1a

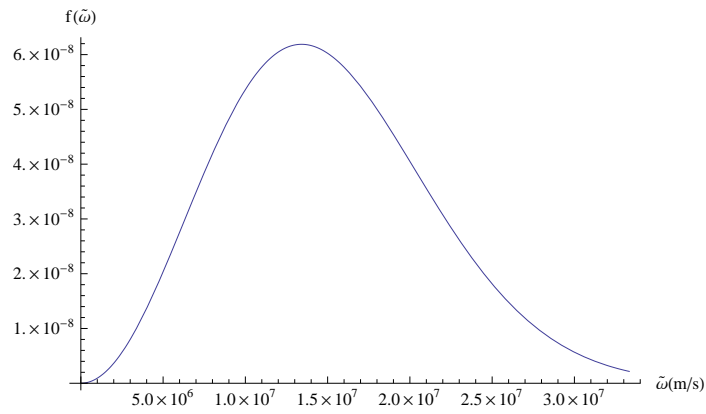


Figura 1b

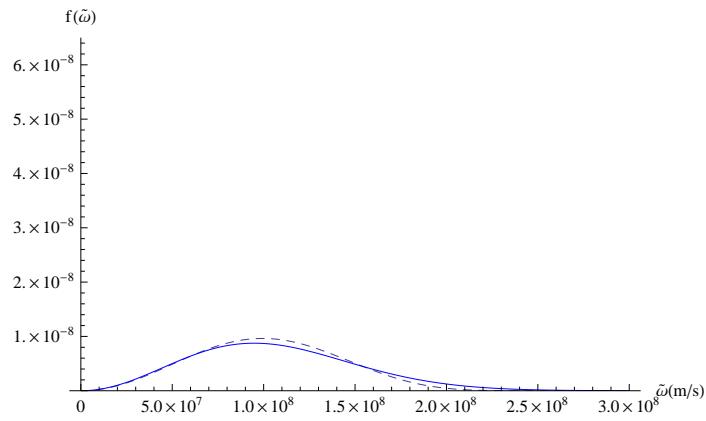
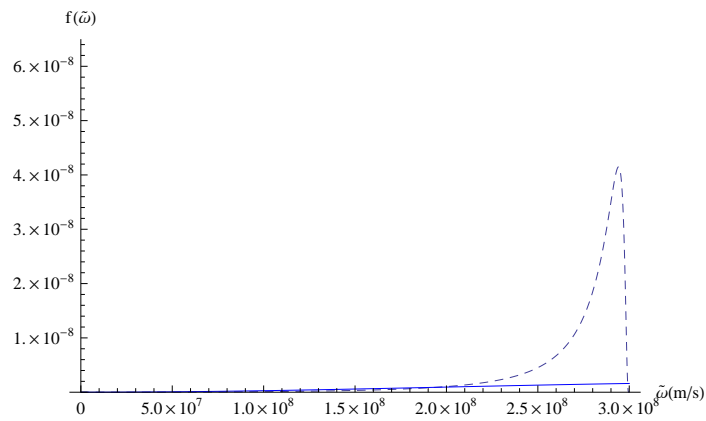


Figura 1c



Figuras 1a, 1b y 1c. Comparación de las distribuciones Maxwell-Boltzmann no relativista (línea continua) y relativista o Jüttner (línea punteada) para diferentes valores de z , de arriba a abajo: $z = 0,0001$, $z = 0,05$ y $z = 1$.

El régimen relativista, en relatividad especial, se describe aquí en un espacio de Minkowsky con la métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2$, la cuadvirvelocidad de las moléculas en este gas viene dada por $v^\mu = \gamma_{(\omega)}(\vec{\omega}, c)$ con $\gamma_{(\omega)} = \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, y $\vec{\omega}$ la tri-velocidad molecular.

La ecuación de Boltzmann relativista en ausencia de fuerzas externas, se puede escribir de la siguiente forma, en notación tensorial [34]:

$$v^\alpha f_{,\alpha} = J(ff'), \quad (32)$$

el término colisional $J(ff')$ se define de manera análoga que en el caso clásico:

$$J(ff') = \int \int (f' f'_1 - f f_1) \tilde{\vartheta} \iota d\Omega d^*v_1, \quad (33)$$

donde $\tilde{\vartheta}$ es un flujo invariante de partículas [34], que juega el papel de una velocidad relativa. En este caso $d^*v_1 = \frac{cd^3v_1}{v^4}$ es el diferencial de volumen en el espacio de velocidades y es una invariante [36]. Al igual que en el caso no relativista, se puede usar el método de Chapman y Enskog para proponer una solución a la ecuación de Boltzmann. La ecuación de transporte queda como sigue:

$$\left(\int v^\nu \psi f d^*v \right)_{;\nu} = 0, \quad (34)$$

con $d^*v = \frac{cd^3v}{v^4}$. Al sustituir en la ec. (34) las cantidades conservadas en procesos colisionales, se obtienen la ecuación de continuidad con $\psi = 1$ y la ecuación de balance energía-momentum con $\psi = mv^\beta$. Se debe tomar en cuenta que para $\beta = 1, 2$ y 3 , se obtiene la ecuación de balance de ímpetu (en ausencia de fuerzas externas) y para $\beta = 4$, la ecuación de conservación de la energía. Por otro lado, la ec. (34) puede escribirse de la siguiente manera:

$$N^\nu_{;\nu} = 0 \quad (35)$$

y

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (36)$$

donde N^ν es el cuadri-flujo de partículas, definido como:

$$N^\nu = \int v^\nu f d^*v \quad (37)$$

y $T^{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos-energía, dado por:

$$T^{\mu\nu} = m \int v^\mu v^\nu f d^*v. \quad (38)$$

Ahora bien, con la finalidad de introducir el concepto de la velocidad caótica, tal y como se hizo en la sección anterior, se usa la matriz de transformación de Lorentz [36, 39] para transformar la velocidad v^β vista desde el sistema de laboratorio (S) y \bar{v}^α la vista desde un sistema que está en la misma celda donde se mueve la molécula (\bar{S}):

$$v^\beta = L_\alpha^\beta \bar{v}^\alpha = L_\alpha^\beta K^\alpha, \quad (39)$$

aquí L_α^β es una matriz de Lorentz con velocidad \vec{U} . Por simplicidad en los cálculos se supondrá que la velocidad hidrodinámica sólo se mueve en una dirección:

$$L_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \gamma(u) & 0 & 0 & \frac{u}{c}\gamma(u) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u}{c}\gamma(u) & 0 & 0 & \gamma(u) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

y $K^\alpha = \gamma_{(k)}(\vec{k}, c)$ es la cuadrivelocidad caótica. Con esta transformación se reescriben las definiciones (37) y (38), en función de la velocidad caótica, de la siguiente forma [36]:

$$N^\mu = L_\alpha^\mu \int K^\alpha f d^*K, \quad (41)$$

$$T^{\mu\nu} = mL_\alpha^\mu L_\beta^\nu \int K^\alpha K^\beta f d^*K, \quad (42)$$

donde $d^*v = d^*K$ por ser cantidades invariantes. Ambas integrales pueden calcularse notando el hecho de que la función de distribución puede expresarse en función de la velocidad caótica, puesto que el argumento de la exponencial es $-\gamma_{(k)}/z$. En la referencia [36] se desarrollan los cálculos donde, con herramientas y argumentos de la teoría cinética y usando el método de Chapman y Enskog, se expresan la energía interna, el flujo de calor y el tensor de esfuerzos en función de promedios de la velocidad caótica. En particular se obtiene que, en el sistema comóvil, el flujo de calor es el promedio de la energía caótica:

$$J_{[Q]}^\ell = mc^2 \int \gamma_{(k)} K^\ell f^{(1)} d^*K, \quad (43)$$

aunque se puede realizar una transformación de Lorentz para expresarlo en otro sistema de referencia, el inconveniente es que entonces el flujo de calor tendrá términos de otros flujos mecánicos y contendrá a la velocidad hidrodinámica. Por tanto es conveniente definirlo en el sistema comóvil. Debido a la importancia que tiene la ecuación constitutiva para el flujo

de calor en los capítulos posteriores, en la sección siguiente se esbozarán las patologías de la ecuación propuesta por Eckart para tal efecto y la deducción del formalismo alternativo.

C. La ecuación constitutiva para el flujo de calor

El sistema de ecuaciones de movimiento que permite analizar la dinámica de un fluido simple relativista tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo que resulta necesario contar con ecuaciones adicionales, que se denominan *ecuaciones constitutivas*. En los casos estudiados posteriormente, es necesario introducir una ecuación constitutiva para el flujo de calor. En 1940, como también se vio en capítulos anteriores, Eckart propuso una ecuación, motivada a partir de argumentos fenomenológicos y forzando el cumplimiento local de la segunda ley de la termodinámica (entropía semidefinida positiva). La ecuación constitutiva de Eckart para el flujo de calor es la siguiente [3]:

$$J_{[Q]}^\nu = -\kappa_{th} h_\mu^\nu \left(T^{,\mu} + \frac{T \dot{\mathcal{U}}^\mu}{c^2} \right), \quad (44)$$

donde κ_{th} es la conductividad térmica, $\dot{\mathcal{U}}^\mu$ la aceleración hidrodinámica, $T^{,\mu}$ el gradiente de temperatura y $h^{\mu\nu}$ el proyector espacial definido por $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{\mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu}{c^2}$ con $g^{\mu\nu}$ la métrica del espacio y una signatura $(+ + + -)$.

Sin embargo, en 1985 Hiscock y Lindblom [5] demostraron que el uso de la ecuación constitutiva de Eckart genera que las soluciones del sistema linealizado de ecuaciones mencionado diverjan (incremento exponencial de las fluctuaciones), lo que se ha llamado en la literatura especializada "inestabilidades genéricas". Este tema ha sido ampliamente estudiado [22], de hecho, recientemente se demostró que el problema de la inestabilidad se debe al acoplamiento entre el flujo de calor ($J_{[Q]}^\nu$) y la aceleración ($\dot{\mathcal{U}}^\mu$), presente en la ecuación constitutiva de Eckart [40]. Otro problema o "patología" que presentan las soluciones generadas al usar la ecuación constitutiva de Eckart, es el de no satisfacer el principio de antecendencia, esto es, no son causales. Estas inestabilidades representan una violación a la *hipótesis de regresión lineal de fluctuaciones*, que según Onsager estipula que las fluctuaciones espontáneas de las variables de estado alrededor de sus valores en equilibrio deben atenuarse, siguiendo las ecuaciones linealizadas establecidas para dichas variables; por otro lado, la ecuación (44) presenta una inconsistencia en cuanto a su forma puesto que el término de la aceleración hidrodinámica no es el gradiente de una variable termodinámica intensiva o de un campo

externo, violando el supuesto de las ecuaciones constitutivas lineales.

En 2009, se dedujo una ecuación constitutiva [6, 40], a partir de la teoría cinética [41] que es consistente con la forma (10) y que no viola la hipótesis de Onsager de regresiones lineales de las fluctuaciones. Esta ecuación constitutiva es la siguiente:

$$J_{[Q]}^\nu = -h_\mu^\nu (L_{TT}T^{\cdot\mu} + L_{nT}n^{\cdot\mu}), \quad (45)$$

donde $n^{\cdot\mu}$ es el gradiente de la densidad de partículas, $T^{\cdot\mu}$ el gradiente de la temperatura local y L_{TT} y L_{nT} son coeficientes de transporte que vienen dados por las siguientes expresiones [6]:

$$L_{TT} = \frac{nk_B^2 T^2 \tau}{m} \left\{ \left[\frac{1}{z} - \left(4z + \frac{\mathcal{K}_1(1/z)}{\mathcal{K}_2(1/z)} \right)^{-1} \right] \left(\frac{1}{z} + 5\mathcal{G}(1/z) \right) - \left(1 + \frac{\mathcal{K}_1(1/z)}{2z\mathcal{K}_2(1/z)} + \frac{\mathcal{G}(1/z)}{2z} \right) \frac{\mathcal{G}(1/z)}{z} \right\}, \quad (46)$$

$$L_{nT} = \frac{nk_B^2 T^2 \tau}{m} \left[\frac{\mathcal{G}(1/z)}{z} - \left(4z + \frac{\mathcal{K}_1(1/z)}{\mathcal{K}_2(1/z)} \right)^{-1} \left(\frac{1}{z} + 5\mathcal{G}(1/z) \right) \right], \quad (47)$$

donde $\mathcal{K}_n(1/z)$ es la función de Bessel modificada de orden n y $\mathcal{G}(1/z) = \mathcal{K}_3(1/z)/\mathcal{K}_2(1/z)$; L_{TT} es una conductividad térmica efectiva y L_{nT} sólo aparece en el caso relativista.

La manera de calcular (45) fue la siguiente [40, 41]: se parte de la ecuación de Boltzmann en ausencia de fuerzas externas, con la aproximación BGK (sin pérdida de generalidad). Se usa el método de Chapman y Enskog, de modo que se supone que la solución es de la forma $f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)}$. Se establece $f^{(1)}$, mediante las derivadas de la función de distribución en equilibrio (ver apéndice E). Luego, se escriben las derivadas temporales en términos de los gradientes espaciales por medio de las ecuaciones de Euler (ver apéndice F), este paso es imprescindible y tendrá como consecuencia el acoplamiento de los flujos con las fuerzas termodinámicas (gradientes espaciales de las variables termodinámicas locales). Siguiendo este procedimiento quedará un término en función de la presión y la energía interna, que a su vez se expresa en términos de las variables n y T , mediante una ecuación de estado. Finalmente, el flujo de calor queda expresado en términos de los gradientes de densidad de partículas y de temperatura.

D. La aproximación BGK

La tasa de cambio de la función de distribución debida a las colisiones o a interacciones microscópicas es lo que se denomina el kernel colisional y se denotó en las secciones anteriores por $J(ff')$. En 1954, Bhatnagar, Gross y Krook desarrollaron una aproximación ampliamente usada [2], que preserva la forma general de la función de distribución y su uso simplifica los cálculos, de otro modo complicados, involucrados en el kernel completo. Cabe mencionar que de manera independiente también la desarrolló Welander [42]. Lo que estos autores propusieron es modificar los términos colisionales de tal manera que cada colisión conserve la densidad de partículas, el momentum y la energía. Al utilizar esta aproximación se reemplaza el término de la integral colisional por un término de relajación de la forma:

$$\frac{f^{(0)}(\vec{r}, \vec{v}, t) - f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\tau}, \quad (48)$$

donde τ es un tiempo de relajación. Esto expresa el hecho de que las colisiones tienden a relajar la función de distribución hasta un valor $f^{(0)}$.

En esta tesis se hará uso, en ciertos casos, de esta aproximación por considerarla adecuada ya que se trabaja con sistemas monocomponentes de baja densidad, condiciones bajo las cuales ha probado ser efectiva la aproximación [34].

E. Método del análisis de fluctuaciones

Una de las complicaciones del sistema de ecuaciones diferenciales parciales que rige la dinámica de los fluidos es la no linealidad. Para abordar este problema se *linealizan* las ecuaciones. Se podría hacer uso de la teoría cualitativa, que se vale de métodos topológicos y de otras consideraciones para, si no encontrar soluciones, al menos sí describirlas. Destacan los métodos numéricos, que básicamente discretizan el volumen (en volúmenes más pequeños llamados celdas) y resuelven el sistema algebraico de ecuaciones en cada una de ellas.

El análisis de fluctuaciones comienza considerando que las variables termodinámicas con las que decidimos trabajar son perturbadas alrededor de su valor en equilibrio. La fluctuación viene dada por una función que depende de x^ℓ y de t ; los productos de estas fluctuaciones se desprecian, por ser cantidades pequeñas comparadas con los valores en equilibrio de las funciones termodinámicas. Así pues, tenemos que cualquier función termodinámica Υ será

sustituida por la expresión $\Upsilon_0 + \delta\Upsilon(x^\ell, t)$. De esta manera, lo que se hace es analizar el comportamiento de las fluctuaciones cerca del equilibrio, por medio de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales parciales.

IV. CAUSALIDAD Y DISPERSIÓN RAYLEIGH-BRILLOUIN

El tema de causalidad (o *principio de antecendencia*) ha despertado el interés de los científicos desde hace muchos años. En los sistemas no relativistas se sabe bien que una causa siempre debe estar ubicada temporalmente *antes* del efecto que provoca. Matemáticamente esto puede representarse mediante una ecuación diferencial parcial hiperbólica, como lo es la ecuación de ondas. Sin embargo, en los sistemas relativistas, esta representación no es suficiente para garantizar la causalidad, pues una ecuación de tipo hiperbólica puede arrojar una rapidez característica mayor a la rapidez de la luz en el medio. Como se sabe, en los sistemas relativistas no están permitidos estos valores de rapidez, lo que se puede visualizar como un cono de luz que restringe estos valores permitidos, esto es, las causas deberán estar contenidas en el cono.

De Groot, en el capítulo VIII de [43] establece la siguiente definición para el principio de causalidad: Considérese n fuerzas motrices $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$, que a su vez inducen n respuestas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, para fuerzas motrices suficientemente pequeñas, la relación entre dichas fuerzas y sus respuestas es lineal y de la forma:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{ik}(t-t') F_k(t') dt', \quad (49)$$

donde χ_{ik} representa funciones finitas dependientes del tiempo, específicas para el sistema. Dado que una respuesta no puede preceder su efecto (que es el causante de la respuesta), se cumple la siguiente condición para $t < t'$:

$$\chi_{ik}(t-t') = 0. \quad (50)$$

Ahora bien, se estipula que para evitar la violación del principio de causalidad, también se requiere la existencia de la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \chi_{ik}(t-t') dt' < \infty. \quad (51)$$

El hecho de que se tenga el registro de dos integrales convergentes para representar la estabilidad (49) y (51), sugiere la posibilidad de establecer un vínculo entre causalidad y estabilidad (estabilidad entendida en el sentido de soluciones que no divergen). Sin embargo, este parece ser un problema abierto porque en general se busca demostrar tanto la no

violación del principio de antecendencia como la estabilidad de las soluciones. En la literatura se ha citado el trabajo de Denicol et al [44], donde se demuestra que la no causalidad induce el comportamiento inestable de las soluciones de las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas disipativos. Este capítulo se dedica a evidenciar la no violación del principio de causalidad en dos casos particulares, a pesar de que con anterioridad se había demostrado la no existencia de inestabilidades [40]. Cabe recalcar que las demostraciones que a continuación se presentan son válidas incluso para fuerzas motrices que no son pequeñas (restricción de la definición de Groot).

A. Ecuaciones de transporte para fluctuaciones en el régimen de Euler

Debe recordarse que para un gas relativista simple, no degenerado, y en equilibrio, la función de distribución (Jüttner) viene dada por la expresión (31), transcrita a continuación:

$$f_{RE}^{(0)} = \frac{n}{4\pi c^3 \mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} e^{\frac{u^\beta v_\beta}{zc^2}},$$

donde $\mathcal{K}_2(1/z)$ es la función de Bessel modificada de orden 2 y z es el parámetro relativista dado por $k_B T/mc^2$. Cuando sea claro que se está trabajando con esta función, se obviará el subíndice RE .

En el régimen de Euler no existe disipación, y en esta sección no se están incluyendo fuerzas externas, de modo que las ecuaciones de balance quedan como sigue [34]:

- la ecuación de continuidad:

$$\dot{n} + n\theta = 0, \quad (52)$$

donde θ es la divergencia de la velocidad hidrodinámica.

- La ecuación de balance de ímpetu:

$$\tilde{\rho} \dot{\mathcal{U}}^k + p^{,k} = 0, \quad (53)$$

con $\tilde{\rho} = \frac{n\varepsilon+p}{c^2}$ y p la presión local. Al calcular la divergencia de la ecuación (53) se obtiene:

$$\tilde{\rho} \dot{\mathcal{U}}_{;k}^k + \mathcal{U}^k \tilde{\rho}_{,k} + \nabla^2 p = 0, \quad (54)$$

lo que se expresa en función de θ como sigue:

$$\tilde{\rho}\dot{\theta} + \mathcal{U}^k \tilde{\rho}_{,k} + \nabla^2 p = 0, \quad (55)$$

- y la ecuación de conservación de la energía:

$$\tilde{\rho}\dot{\varepsilon} + p\theta = 0, \quad (56)$$

con ε la energía interna, que puede reescribirse como:

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_n \dot{T} + p\theta = 0. \quad (57)$$

Al linearizar estas ecuaciones, esto es, sustituyendo

- n por $n_0 + \delta n$
- \mathcal{U}^k por $\mathcal{U}_0^k + \delta \mathcal{U}$ y
- T por $T_0 + \delta T$,

y al despreciar los dobles productos de los términos con δ y de orden superior, resulta un sistema linealizado. Un aspecto importante del formalismo que sigue a continuación lo constituye el sistema de referencia: se trabaja en el sistema comóvil, un sistema de referencia que se mueve con el elemento de fluido; esto quiere decir que se hace igual a cero la velocidad promedio \mathcal{U}^α , sin embargo, las fluctuaciones ($\delta \mathcal{U}$) no se anulan. El sistema de ecuaciones queda entonces como sigue:

- la ecuación linealizada de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta n) + n_0 \delta \theta = 0, \quad (58)$$

- la ecuación linealizada de balance de ímpetu:

$$\tilde{\rho}_0 \frac{\partial}{\partial t}(\delta \theta) + n_0 k_B \nabla^2(\delta T) + k_B T_0 \nabla^2(\delta n) = 0, \quad (59)$$

donde $\tilde{\rho}_0 = \frac{n_0 \varepsilon_0 + p_0}{c^2}$, y además se hizo uso de la ecuación del gas ideal ($p = nk_B T$). Y por último,

- la ecuación linealizada de conservación de la energía:

$$n_0 \left[3k_B + mc^2 \left(\frac{\mathcal{K}_1(1/z)}{\mathcal{K}_2(1/z)} \right) \right] \frac{\partial}{\partial t}(\delta T) + n_0 k_B T_0 \delta\theta = 0, \quad (60)$$

y sabiendo que el calor específico a volumen constante es $c_v = \left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T} \right)_n$, la ecuación (60) se puede reescribir como:

$$n_0 c_v \frac{\partial}{\partial t}(\delta T) + n_0 k_B T_0 \delta\theta = 0. \quad (61)$$

La clave para preservar un sistema hiperbólico es la consideración de las fluctuaciones en velocidad. En el apéndice G se muestra una analogía ilustrativa de esta situación, en el caso de la electrodinámica, en el tratamiento de las ecuaciones de Maxwell. En seguimiento a estas ideas, resulta pertinente revisar las propiedades de causalidad en este tipo de sistemas, concentrándose en la posibilidad de generar una ecuación diferencial parcial hiperbólica que describa *fluctuaciones en temperatura*.

Con la finalidad de establecer una ecuación diferencial parcial para $\delta\theta$ primero se obtienen las siguientes relaciones para las derivadas temporales de n y T a partir de las ecuaciones (58):

$$\frac{\partial(\delta n)}{\partial t} = -n_0 \delta\theta, \quad (62)$$

y a partir de (61):

$$\frac{\partial(\delta T)}{\partial t} = -\frac{k_B T_0}{c_v} \delta\theta. \quad (63)$$

Se toma una derivada respecto del tiempo en ambos lados de la ecuación (59):

$$\tilde{\rho}_0 \frac{\partial^2(\delta\theta)}{\partial t^2} + n_0 k_B \nabla^2 \frac{\partial(\delta T)}{\partial t} + k_B T_0 \nabla^2 \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} = 0, \quad (64)$$

de modo que, insertando la expresión para $\frac{\partial}{\partial t}(\delta n)$ de la ecuación (62) y la expresión $\frac{\partial(\delta T)}{\partial t}$ de la ecuación (63) se obtiene:

$$\tilde{\rho}_0 \frac{\partial^2(\delta\theta)}{\partial t^2} + n_0 k_B \nabla^2 \left(-\frac{k_B T_0 \delta\theta}{c_v} \right) + k_B T_0 \nabla^2 (-n_0 \delta\theta) = 0. \quad (65)$$

Luego de un arreglo algebraico se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2(\delta\theta)}{\partial t^2} - \left[\left(\frac{k_B n_0 T_0}{\tilde{\rho}_0} \right) \left(\frac{k_B}{c_v} + 1 \right) \right] \nabla^2 (\delta\theta) = 0. \quad (66)$$

Se ha demostrado que las fluctuaciones en $\delta\theta$ satisfacen una ecuación de ondas (hiperbólica).

Con la finalidad de desacoplar el sistema y establecer una ecuación diferencial parcial para δn y δT primero se resuelve para $\delta\theta$ en ambos lados de las ecuaciones (58) y (61). Igualando estos resultados se obtiene la útil relación:

$$\frac{\partial(\delta n)}{\partial t} = \frac{c_v n_0}{k_B T_0} \frac{\partial(\delta T)}{\partial t}, \quad (67)$$

e integrando a ambos lados se obtiene que:

$$\delta n = \frac{c_v n_0}{k_B T_0} \delta T + R_0(\vec{r}), \quad (68)$$

donde $R_0(\vec{r})$ es una función que proviene del cálculo de la integral y que depende sólo de \vec{r} . Se toma una derivada respecto del tiempo en ambos lados de la ecuación (58):

$$\frac{\partial^2(\delta n)}{\partial t^2} + n_0 \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t} = 0, \quad (69)$$

y se sustituye la expresión $\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}$ tomándola de la ecuación de balance de ímpetu (59):

$$\frac{\partial^2(\delta n)}{\partial t^2} + \frac{n_0}{\tilde{\rho}_0} (-n_0 k_B \nabla^2(\delta T) - k_B T_0 \nabla^2(\delta n)) = 0, \quad (70)$$

después se sustituye δT desde la ecuación (68):

$$\frac{\partial^2(\delta n)}{\partial t^2} + \frac{n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(-n_0 k_B \left(\frac{k_B T_0}{c_v n_0} \right) \nabla^2((\delta n) - R_0) - k_B T_0 \nabla^2(\delta n) \right) = 0, \quad (71)$$

y al re-agrupar los términos resulta:

$$\frac{\partial^2(\delta n)}{\partial t^2} - \frac{n_0 k_B T_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} + 1 \right) \nabla^2(\delta n) = -\frac{n_0 k_B^2 T_0}{\tilde{\rho}_0 c_v} \nabla^2(R_0). \quad (72)$$

En el apéndice H se demuestra que $\nabla^2(R_0) = 0$, por lo tanto, las fluctuaciones en densidad satisfacen una ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2(\delta n)}{\partial t^2} - \frac{n_0 k_B T_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} + 1 \right) \nabla^2(\delta n) = 0. \quad (73)$$

Se efectúa un cálculo similar para encontrar la ecuación que satisfacen las fluctuaciones en temperatura (δT). Se toma una derivada respecto del tiempo en ambos lados de la ecuación (63):

$$\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial t^2} = -\frac{k_B T_0}{c_v} \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}, \quad (74)$$

después se sustituye la expresión $\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}$ tomándola desde la ecuación de balance de ímpetu (59):

$$\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial t^2} = \frac{k_B T_0}{c_v} \left(\frac{n_0 k_B}{\tilde{\rho}_0} \nabla^2(\delta T) + \frac{k_B T_0}{\tilde{\rho}_0} \nabla^2(\delta n) \right), \quad (75)$$

y se sustituye δn desde la ecuación (68):

$$\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial t^2} = \frac{k_B T_0}{c_v \tilde{\rho}_0} \left[n_0 k_B \nabla^2(\delta T) + k_B T_0 \nabla^2 \left(\frac{c_v n_0}{k_B T_0} \delta T + R_0 \right) \right], \quad (76)$$

de donde:

$$\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial t^2} - \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] \nabla^2(\delta T) = \frac{k_B^2 T_0^2}{\tilde{\rho}_0 c_v} \nabla^2(R_0), \quad (77)$$

de modo que después de un rearrreglo de términos y tomando en cuenta que $\nabla^2(R_0) = 0$, se puede escribir la ecuación de ondas para las fluctuaciones de temperatura como sigue:

$$\nabla^2(\delta T) - \frac{\tilde{\rho}_0 c_v}{k_B n_0 T_0 (c_v + k_B)} \frac{\partial^2(\delta T)}{\partial t^2} = 0. \quad (78)$$

Así pues, *las fluctuaciones de temperatura en un fluido relativista en el régimen de Euler satisfacen una ecuación de ondas*. Además, la rapidez de propagación (C_s) de una onda material en un fluido relativista de Euler viene dada por la siguiente expresión:

$$C_s^2 = \frac{n_0 T_0 (c_v + k_B) k_B}{\tilde{\rho}_0 c_v}. \quad (79)$$

O bien, sustituyendo $\tilde{\rho}_0 = \frac{n_0 \varepsilon_0 + p_0}{c^2}$:

$$C_s^2 = \frac{n_0 T_0 (c_v + k_B) k_B}{c_v (n_0 \varepsilon_0 + p_0)} c^2. \quad (80)$$

A continuación se recupera el límite no relativista: dado que en este sistema, gas ideal monoatómico, el calor específico a volumen constante es $c_v = \frac{3}{2} k_B$ y si

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{n_0 m c^2}{c^2} + \frac{p_0}{c^2}, \quad (81)$$

a presión atmosférica, el término p_0/c^2 es despreciable, se obtiene entonces que:

$$\tilde{\rho}_0 \cong n_0 m, \quad (82)$$

al sustituir esta expresión en C_s^2 resulta:

$$C_s^2 = \frac{5}{3} \frac{k_B T_0}{m}, \quad (83)$$

y, en términos de z :

$$C_s^2 \rightarrow \frac{5}{3} z c^2, \quad (84)$$

que es la rapidez no relativista del sonido.

Por otro lado, la expresión (80) puede reescribirse en términos de z como:

$$C_s^2 = \frac{(c_v + k_B)z}{c_v \left(4z + \frac{\kappa_1(1/z)}{\kappa_2(1/z)}\right)} c^2. \quad (85)$$

En la figura 2 se muestra que esta rapidez es menor a c , además, fácilmente se puede calcular que $\lim_{z \rightarrow \infty} C_s^2 = (c_v + k_B)/(4c_v) < c$.

El hecho por sí mismo de que las ecuaciones (66, 73 y 78) sean del tipo hiperbólico no garantiza la causalidad; si en lugar de la función de distribución de Jüttner se hubiese usado la de Maxwell-Boltzmann, que se hubiera visto reflejado en la expresión para la energía (ε), las velocidades de propagación de las fluctuaciones hubiesen alcanzado rapidezces mayores que las de la luz, tal como lo indica la figura 1c.

Resulta interesante hacer notar que algunos autores realizan un análisis similar para δn , despreciando las fluctuaciones en temperatura, y sólo tomando en cuenta las ecuaciones (58) y (59), con el objetivo de establecer una ecuación de ondas para las fluctuaciones en densidad de partículas [45]. En ese caso, se encuentra fácilmente que la rapidez de propagación correspondiente es:

$$C_T^2 = \frac{z}{\left(4z + \frac{\kappa_1(1/z)}{\kappa_2(1/z)}\right)} c^2. \quad (86)$$

En el mismo orden de ideas, se puede realizar un análisis simple despreciando las fluctuaciones en densidad del número de partículas y sólo tomando en cuenta las ecuaciones (59) y (60). En este caso, la expresión para la rapidez de propagación para las fluctuaciones en temperatura resulta ser:

$$C_n^2 = \frac{z}{\frac{c_v}{k} \left(4z + \frac{\kappa_1(1/z)}{\kappa_2(1/z)}\right)} c^2. \quad (87)$$

La figura 2 muestra la comparación de las diferentes rapidezces de propagación de fluctuaciones, al graficar las expresiones obtenidas como función de z . Es interesante hacer notar que se cumple la relación $C_s^2 = C_n^2 + C_T^2$ [11].

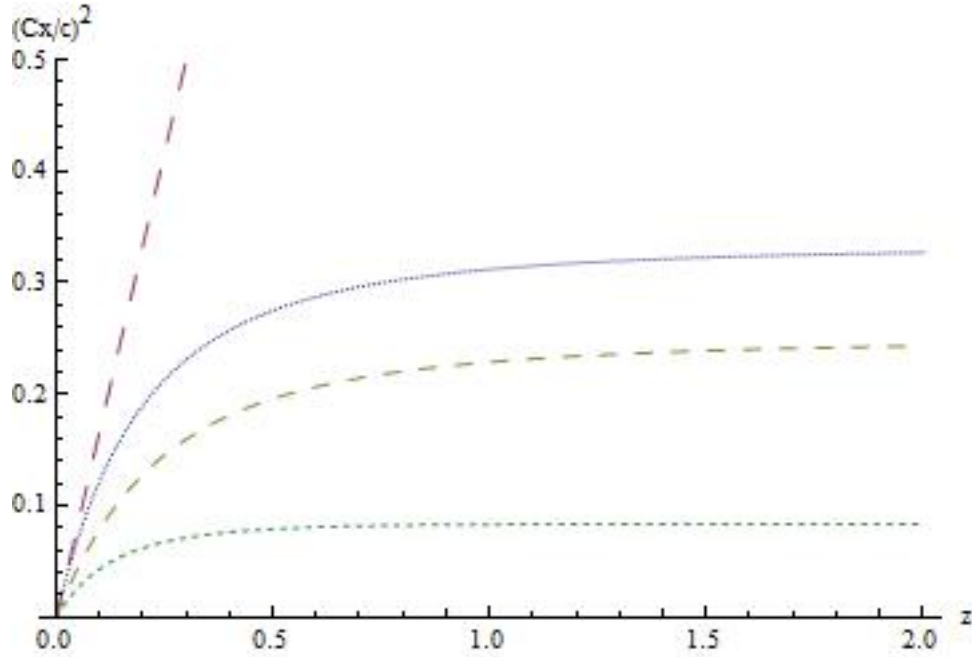


Figura 2. Comparación de las rapidezces de propagación de fluctuaciones divididas entre c^2 para el caso relativista (línea sólida), el caso no relativista (guiones largos), fluctuaciones de densidad (δn) despreciando las fluctuaciones de temperatura (guiones cortos) y fluctuaciones de temperatura (δT) despreciando las fluctuaciones de densidad (línea punteada).

Se ha demostrado que el límite no relativista se recupera, dejando claro que, bajo el régimen de Euler, la evolución espacio-temporal de fluctuaciones en un fluido relativista no presenta problemas de causalidad, puesto que las perturbaciones se transmiten a una rapidez finita (C_s). Es de esperarse que el caso disipativo, con el sistema completo, tampoco muestre problemas de causalidad. Para analizar este caso, se hace uso de las propiedades del espectro de Rayleigh-Brillouin, que se describe a continuación.

B. El espectro de Rayleigh-Brillouin

Un fluido simple, no relativista, se puede describir a partir de sus dos modos hidrodinámicos transversales y tres modos hidrodinámicos longitudinales [46–48]. Estos últimos permiten explicar el origen de la dispersión de la luz, cuando ésta interactúa con ondas que se mueven en un fluido de este tipo, dando lugar a lo que se llama el espectro de Rayleigh-Brillouin. Cabe recalcar que dicho espectro -no relativista- fue predicho por primera vez en 1934 [49] y observado experimentalmente en 1966 [47]. Consiste en un pico central (el pico de Rayleigh)

y dos picos secundarios (los picos de Brillouin) que se forman debido a un efecto Doppler que tiene lugar en la luz dispersada de los modos acústicos. Este efecto es el aparente cambio de frecuencia de una onda producida por el movimiento relativo de la fuente respecto a su observador.

Si se denota por $\check{\omega}_0$ el centro del pico de Rayleigh, entonces los dos máximos de Brillouin se encuentran ubicados en $\check{\omega}_0 \pm c_s q$, donde c_s es la rapidez del sonido en ese medio; y, q , el número de onda. Esta dispersión se genera cuando la luz de frecuencia ν es re-emitida con una frecuencia $\nu' = \nu(1 \pm \frac{u}{c})$, donde u es la rapidez de propagación de la fluctuación.

Obsérvese que el máximo valor que puede tomar u es la rapidez de la luz, cuando esto sucede $\nu' = \nu(1 \pm 1)$, es decir, el máximo valor permitido para ν' es 2ν (que ocurre cuando $u = c$). Por lo anterior, la relación $\nu' \not\geq 2\nu$ permite verificar las propiedades de causalidad. Dado que la frecuencia se puede calcular como el producto del número de onda por la rapidez de propagación, siendo la máxima rapidez de propagación nuevamente la rapidez de la luz, se puede expresar la relación como $\nu' \not\geq 2cq$. Esta situación puede representarse como *un cono de luz en el dominio de la frecuencia*, con regiones permitidas y prohibidas, las permitidas son aquellas que derivan de una rapidez de propagación menor a c ; es decir, si $\nu' > 2cq$ implica que la rapidez de propagación de la fluctuación es mayor a la rapidez de la luz. La figura 3 es una representación del cono de frecuencias en dos dimensiones.

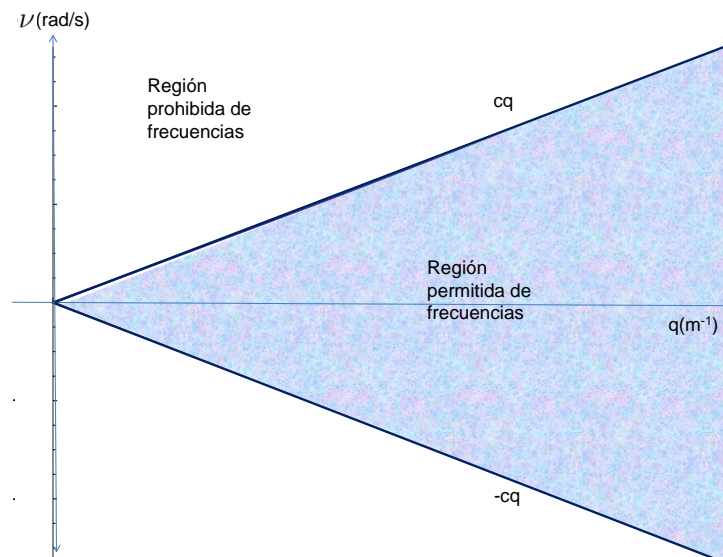


Figura 3. Cono de frecuencias en dos dimensiones, delimitado por la rapidez de la luz, que presenta las regiones de frecuencias prohibidas y permitidas. Si la rapidez de propagación es menor a la rapidez de

la luz, la frecuencia asociada está permitida (su valor se encuentra dentro del cono); en caso contrario, se encuentra fuera.

Con la finalidad de analizar las propiedades de causalidad, se estudiará la expresión calculada para el ancho del pico de Rayleigh, utilizada también para el análisis de estabilidad [50]. Para llegar a ella, se debe establecer la relación de dispersión del espectro, cuyos coeficientes y solución brindan información del fluido. Para ello, se parte de las ecuaciones $N_{;\nu}^{\nu} = 0$ (35) y $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ (36), que se linealizan [6, 50], obteniendo las siguientes ecuaciones:

- la ecuación de continuidad, que es la misma que en el régimen de Euler:

$$\delta\dot{n} + n_0\delta\theta = 0, \quad (88)$$

- la de balance de ímpetu,

$$\frac{1}{c^2} (n_0\varepsilon_0 + p_0) \delta\dot{\mathcal{U}}_{\nu} + kT_0\delta n_{,\nu} + n_0k\delta T_{,\nu} + \delta J_{[Q];\nu}^{\nu} = 0, \quad (89)$$

- la de conservación de la energía

$$nC_n\delta\dot{T} + n_0kT_0\delta\theta + \delta J_{[Q];\nu}^{\nu} = 0, \quad (90)$$

- y la ecuación constitutiva para el flujo de calor elegida para realizar el análisis.

Resulta necesario obtener la divergencia de la ecuación de balance de ímpetu [50] y de la ecuación constitutiva escogida, para así poder formar un sistema de ecuaciones con las incógnitas (δn , δT , $\delta\theta$ y $\delta J_{[Q];\nu}^{\nu}$). Luego, se obtienen sucesivamente las transformadas de Fourier y de Laplace. Posteriormente se escribe la ecuación matricial del sistema transformado, que será de la forma $MH = ND_0$, donde M es una matriz de 4×4 cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas, H es una de 4×1 , formado con las incógnitas, N es una matriz de 4×4 que contiene los coeficientes de las transformadas de Fourier-Laplace de los valores iniciales de las incógnitas y D_0 es también de 4×1 y contiene los valores iniciales de las incógnitas. Se calcula el determinante de la matriz M y se iguala a cero, a esta ecuación se le denomina *relación de dispersión*. Ésta relaciona el número o longitud de onda con su frecuencia. Sus raíces permiten calcular la función de correlación densidad-densidad cuya contribución es la dominante en el espectro [46]. *Esta relación cambiará según la ecuación constitutiva utilizada*. Al usarse la ecuación constitutiva de Eckart, la relación de dispersión resulta [50]:

$$d_4 s^4 + s^3 + d_2 s^2 q^2 + s(d_3 q^4 + d_0 q^2) + d_1 q^4 = 0, \quad (91)$$

cuyos coeficientes d_4 , d_3 , d_2 , d_1 y d_0 están dados por:

$$d_4 = -\frac{k_B T_0}{c^4 \tilde{\rho}_0}, \quad (92)$$

$$d_3 = \frac{A \kappa_{th}}{\tilde{\rho}_0 m n_0 c_v}, \quad (93)$$

$$d_2 = \frac{A}{\tilde{\rho}_0} + \frac{\kappa_{th}}{m n_0 c_v} \left(1 - \frac{2T_0^2 n}{c^2 \tilde{\rho}_0} \right), \quad (94)$$

$$d_1 = \frac{k_T T_0 k_B}{m c_v \tilde{\rho}_0}, \quad (95)$$

$$d_0 = \frac{c_p k_B n_0 T_0}{c_v \tilde{\rho}_0}, \quad (96)$$

donde c_p es el calor específico a presión constante, k_T es la compresibilidad isotérmica y $A = \zeta + 4\eta/3$, con ζ y η las viscosidades volumétrica y cortante respectivamente. Si se desprecian las viscosidades, entonces $A = 0$.

Una de las cuatro raíces [50] *no corresponde a un espectro finito* puesto que la transformada inversa de Fourier correspondiente diverge.

Por otro lado, al utilizar el formalismo modificado [6], dado por la ecuación (45), la relación de dispersión es de tercer grado (y no de cuarto, como en el caso donde se usa el formalismo de Eckart) y es la siguiente (los cálculos a detalle se presentan en el apéndice I):

$$s^3 + b_2 s^2 q^2 + s(b_3 q^4 + b_1 q^2) + b_4 q^4 = 0, \quad (97)$$

cuyos coeficientes están definidos por:

$$b_2 = \frac{A}{\tilde{\rho}_0} + \frac{L_{TT}}{n_0 c_v} \left(1 - \frac{T_0^2 n_0}{c^2 \tilde{\rho}_0} \right) - \frac{n_0 L_{nT}}{c^2 \tilde{\rho}_0}, \quad (98)$$

$$b_3 = \frac{A L_{TT}}{n_0 c_v \tilde{\rho}_0}, \quad (99)$$

$$b_1 = \frac{c_P k_B n_0 T_0}{c_v \tilde{\rho}_0}, \quad (100)$$

$$b_4 = \frac{T_0 k_B}{c_v \tilde{\rho}_0} \left(L_{TT} - \frac{n_0 L_{nT}}{\kappa_{th}} \right). \quad (101)$$

Nuevamente, al despreciar las viscosidades, se tiene que $A = 0$. En el caso estudiado con el formalismo modificado, se puede demostrar que el ancho del pico de Rayleigh [6] está dado por:

$$\Delta_R = \frac{b_4}{b_1} q^2 = \frac{q^2}{c_P n_0} \left(L_{TT} - \frac{n_0 L_{nT}}{k_B} \right), \quad (102)$$

que es menor a la distancia a la cual se formarían los picos de Brillouin. En cambio, en el formalismo de Eckart, el ancho del pico de Rayleigh está multiplicado por la cantidad

$$\Delta \cong \frac{\rho_0 c^4}{\kappa_{th} T_0}, \quad (103)$$

que es el coeficiente d_4 de la relación de dispersión. Este término predice que el ancho del pico sería muy grande, lo que no coincide con lo observado experimentalmente en el caso no relativista: se ensancharía a tal grado que ocuparía el lugar de los dos picos de Brillouin; por lo tanto, *el formalismo de Eckart no predice la generación del espectro de Rayleigh-Brillouin*. Aun más, el coeficiente d_4 es la clave para demostrar que el formalismo de Eckart conduce a una solución no causal [11], [50] y [51], puesto que, como cq delimita el cono de frecuencia, se debe cumplir la siguiente relación para establecer que el fenómeno tiene un comportamiento causal:

$$d_4 = \frac{\rho_0 c^4}{\kappa_{th} T_0} \not\approx cq, \quad (104)$$

el coeficiente d_4 , que forma parte de la expresión para el ancho del pico, es muy grande debido al factor c^4 que está multiplicando, lo que implica que el fenómeno es no causal pues se encuentra en la región prohibida del cono.

Siguiendo el mismo razonamiento incluido en el trabajo de Hiscock y Lindblom [5] se muestran a continuación algunos cálculos para el agua a temperatura ambiente ($293K$) y a una presión de 1 bar:

$$\frac{\rho_0 c^4}{\kappa_{th} T_0} \sim 10^{34} \frac{1}{seg} \quad (105)$$

y calculando cq con $q \sim 10^7 m^{-1}$

$$cq \sim 10^{15} \frac{1}{seg}. \quad (106)$$

Al comparar estos dos valores, se observa que $10^{34} \gg 10^{15}$ y por lo tanto la solución se encuentra en la región prohibida del cono de frecuencias, es decir, se viola el principio de causalidad. Esto abona evidencias para afirmar nuevamente que *las ecuaciones constitutivas del tipo Eckart, que acoplan el flujo de calor con la aceleración, son las responsables del comportamiento no físico de los sistemas de primer orden en los gradientes*. Este resultado fue publicado en la Ref. [11].

La contraparte de este trabajo con teorías extendidas posee interés matemático. Una de las razones por las cuales se utiliza la termodinámica extendida es porque las inestabilidades y las violaciones al principio de antecendencia a las que se ha hecho referencia no están presentes. Este tema se abordó recientemente por Andersson y Lopez-Monsalvo mediante la postulación de un principio variacional que inevitablemente conduce al acoplamiento del flujo de calor con la aceleración, que aparece en la ecuación para el flujo de calor de Eckart [29]. En el caso no relativista se ha demostrado que el análisis apropiado de fluidos no viscosos e ideales no requieren de la termodinámica extendida [52]. En tales sistemas, no es necesario el uso de un parámetro de relajación asociado con los flujos. En el caso relativista, se demuestra a continuación que el proceso de estabilización de las teorías extendidas se debe a la diferencia entre los tiempos característicos para la relajación del flujo de calor y de la propia inestabilidad [30].

El cálculo que se presenta se realiza siguiendo la sugerencia propuesta en la referencia [5] y su objetivo es aclarar, principalmente, el mecanismo de estabilización utilizado en la ecuación de Maxwell-Cattaneo para el flujo de calor. La dinámica de las fluctuaciones se presenta dominada por dos términos que compiten entre sí: la ecuación constitutiva de Eckart y el término de relajación de Cattaneo.

Resulta importante recalcar que las inestabilidades genéricas no surgen a partir de términos viscosos [40]. La relación constitutiva de Maxwell-Cattaneo para el flujo de calor es la siguiente:

$$\tau J_{[Q]}^\nu + J_{[Q]}^\nu = -\kappa h^{\mu\nu} \left(T_{,\nu} + \frac{T}{c^2} \dot{U}_\nu \right), \quad (107)$$

con un tiempo de relajación tal que $\tau = \lambda/C_s$, donde λ es la trayectoria libre media, del

orden de $10^{-5}m$ y C_s es la rapidez de la fluctuación en el medio. Nótese que la ecuación (107) se reduce a la ecuación constitutiva de Eckart [3] si $\tau = 0$.

Al linealizar la ecuación (107) y escribirla en términos de fluctuaciones resulta que:

$$\tau \delta J_{[Q]}^\nu + \delta J_{[Q]}^\nu = -\kappa_{th} h^{\mu\nu} \left(\delta T_{,\mu} + \frac{T_0}{c^2} \delta \dot{\mathcal{U}}_\mu \right). \quad (108)$$

Así pues, al calcular la divergencia de esta ecuación, el sistema se reduce a un conjunto de cuatro ecuaciones escalares con δn , $\delta \theta$, δT y $\delta J_{[Q];\nu}^\nu$ como incógnitas. El análisis cualitativo de tal sistema se realiza en el espacio de Fourier-Laplace con la finalidad de abordar el comportamiento de tales fluctuaciones.

La matriz de dispersión correspondiente es:

$$A = \begin{pmatrix} s & n_0 & 0 & 0 \\ -k_B T_0 q^2 & n_0 m s + q^2 A & -n_0 k_B q^2 & \frac{s}{c^2} \\ 0 & n_0 k_B T_0 & c_v n_0 s & 1 \\ 0 & \frac{s T_0 \kappa_{th}}{c^2} & -\kappa_{th} q^2 & \tau s + 1 \end{pmatrix}, \quad (109)$$

donde s y q son los parámetros de Laplace y Fourier respectivamente. La relación de dispersión para este sistema ($\det A = 0$) puede escribirse como:

$$d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0, \quad (110)$$

donde los coeficientes d_0 , d_1 , d_2 , d_3 y d_4 vienen expresados como sigue:

$$d_0 = \frac{k T_0 \kappa_{th}}{c_v m n_0} q^4, \quad (111)$$

$$d_1 = \frac{k_B T_0}{m} \left[\left(1 + \frac{k_B}{c_v} \right) q^2 + \frac{A}{n_0} \frac{\kappa}{c_v n_0} q^4 \right], \quad (112)$$

$$d_2 = q^2 \left[\frac{A}{m n_0} + \frac{\kappa_{th}}{c_v n_0} \left(1 - \frac{2k_B T_0}{m c^2} \right) + \frac{k_B T_0}{m} \left(1 + \frac{k_B}{c_v} \right) \tau \right], \quad (113)$$

$$d_3 = 1 + \frac{A}{m n_0} \tau q^2, \quad (114)$$

$$d_4 = \tau - \frac{T_0 \kappa_{th}}{c^4 m n_0}. \quad (115)$$

Al despreciar las viscosidades, $A = 0$. Para continuar con el cálculo de soluciones lo suficientemente precisas de la relación de dispersión de cuarto orden, se siguen los argumentos y procedimientos descritos en la referencia [50]. Dado que d_4 es una cantidad pequeña, tres de las raíces de la ecuación (110) se calculan despreciando el término de cuarto grado y resolviendo la siguiente expresión:

$$d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0. \quad (116)$$

Al usar el método de Mountain, utilizado por primera vez en el estudio del espectro de Rayleigh-Brillouin [53], en el régimen no relativista, se obtiene una raíz real dada por:

$$s_1 = -\frac{D_T}{\gamma} q^2 \quad (117)$$

y las dos soluciones conjugadas:

$$s_{2,3} = -\left[\frac{D_V}{2} + \frac{D_T}{5} + z \left(\frac{5}{6} c^2 \tau - D_T \right) \right] q^2 \pm i \sqrt{\frac{5}{3} \frac{k_B T}{m}} q. \quad (118)$$

Cabe mencionar que el método de Mountain consiste en proponer como solución de la relación de dispersión, una expresión en forma de suma de potencias en q . En la ecuación (118) se usó el hecho de que para un gas ideal monoatómico, con $z \ll 1$, se tiene que $c_v = \frac{3}{2} k_B$ y $\gamma = \frac{5}{3}$. Además, se usaron las definiciones $D_V = \frac{A}{m n_0}$ y $D_T = \frac{\kappa_{th}}{n_0 c_v}$ para las difusividades viscosa y térmica, Estas raíces dan lugar al comportamiento usual de las fluctuaciones de densidad, esto es, un modo de decaimiento con un tiempo característico dado por s_1 , y dos modos oscilantes con frecuencias dadas por las partes imaginarias de s_2 y s_3 . Nótese que las únicas correcciones relativistas a este comportamiento corresponden al coeficiente de Stokes-Kirchoff, el término entre paréntesis en la ecuación (118). Claramente, dado que el tiempo característico τ es del orden del tiempo medio entre colisiones $\sim 10^{-6} s$ y las difusividades térmicas típicas están en el rango $(10^{-7}, 10^{-5}) \frac{m^2}{s}$ [37], el primer término dentro del paréntesis resulta dominante. Esta corrección conlleva sólo un ligero aumento en la parte real de las raíces conjugadas (las que determinan el ancho de los picos de Brillouin), que se anulan cuando $z \rightarrow 0$, en el límite no relativista. Es importante recalcar que el término de la difusión térmica relativista, $z D_T$, se opone a este efecto.

Para dar una solución aproximada de la cuarta raíz, se usa la información de las soluciones previas, asumiendo que las tres soluciones de la ecuación cúbica son raíces aproximadas de la ecuación completa de cuarto orden. Esta suposición es factible porque el coeficiente d_4

tiene un valor pequeño. También se usa el hecho de que la suma de todas las raíces, en un polinomio de orden n , es igual al cociente de los coeficientes de los términos de orden $n - 1$ y n , esto es (d_4/d_3) , de manera que:

$$s_4 = - \left(\tau - \frac{3 D_T z}{2 c^2} \right)^{-1} \left[1 + \frac{q^2}{m n_0 c^4} \left(D_V T_0 \kappa_{th} + \frac{2 T_0 \kappa_{th}^2}{3 k_B n_0} - \frac{4 T_0^2 \kappa_{th}^2}{3 c^2 m n_0} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 c^4 m \kappa_{th} \tau}{3 k} + \frac{4}{3} c^2 T_0 \kappa_{th} \tau + \frac{5 k T_0^2 \kappa_{th} \tau}{3 m} + \frac{5}{3} c^4 k_B n_0 T_0 \tau^2 \right) \right]. \quad (119)$$

Dado que los términos viscosos no aportan aspectos relevantes en cuanto al análisis de la causalidad, se pueden despreciar las viscosidades ζ y η , por consiguiente se simplifican los coeficientes d_1 , d_2 y d_3 y en las ecuaciones (118) y (119), se tendrá que $D_V = 0$. Nótese que si se hace $\tau = 0$, la cuarta raíz resulta positiva y por lo tanto corresponde a un modo en crecimiento. En la referencia [50], la existencia de esta solución positiva de gran magnitud se usó para cuestionar la validez de la ecuación constitutiva de Eckart, en particular el acoplamiento del flujo de calor con la aceleración de la partícula. Por otro lado, para $\tau \neq 0$, se puede realizar la aproximación:

$$s_4 \sim -\frac{1}{\tau} + q^2 \left(D_T + \frac{5 k_B T_0}{3 m} \tau \right). \quad (120)$$

Ahora bien, la ecuación (120) esclarece aún más este punto puesto que, usando el hecho de que $\tau \gg \frac{T_0 \kappa_{th}}{\rho c^4}$, se puede concluir no sólo que el sistema de ecuaciones hidrodinámicas con la ecuación de Cattaneo es estable sino también darse cuenta de que esta estabilización se produce porque el término de relajación domina sobre el crecimiento exponencial provocado por el acoplamiento de Eckart. En otras palabras, el término de la derivada temporal incluido en la ecuación constitutiva de Maxwell-Cattaneo tiene como consecuencia la modificación de la escala temporal para la evolución de las fluctuaciones y, aún más importante, el cambio del comportamiento físico debido a los signos diferentes en los términos de la ecuación (120). La raíz correspondiente encontrada en la referencia [50] para el formalismo de Eckart se escribe de la siguiente manera:

$$s_4 \sim \frac{c^4 m n_0}{\kappa_{th} T_0}, \quad (121)$$

que conduce a un crecimiento exponencial en el factor de estructura. Por otro lado, el resultado del cálculo presentado

$$s_4 \sim -\frac{1}{\tau} \quad (122)$$

corresponde a un espectro finito que eventualmente podría ser observado y medido, aunque los tiempos característicos son necesariamente colisionales [27].

V. LEY DE TOLMAN PARA SISTEMAS FUERA DE EQUILIBRIO

Richard C. Tolman, en 1930, demostró que un fluido en equilibrio termodinámico bajo el efecto de un campo gravitacional estático, genera un flujo de calor capaz de compensar un gradiente de temperatura [54]. Tolman realizó esta demostración en el caso de un sistema en equilibrio, es decir, demostró que existe equilibrio termodinámico cuando un campo gravitacional compensa un gradiente de temperatura. En esta sección se extenderá la ley de Tolman para sistemas fuera de equilibrio a partir de los argumentos de la teoría cinética relativista aplicada a un fluido simple, relativista, no degenerado, en presencia de un campo gravitacional y en equilibrio local.

En secciones anteriores vimos que la ecuación de Boltzmann, para un gas diluido, relativista, en presencia de fuerzas externas, usando la aproximación BGK para el kernel colisional, puede escribirse como

$$v^\alpha f_{,\alpha} + \dot{v}^\mu \frac{\partial f}{\partial v^\mu} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (123)$$

Cabe aclarar que \dot{v}^μ es la derivada de la velocidad de las moléculas con respecto al tiempo propio, medido desde la molécula (sistema del laboratorio). En presencia de un campo gravitacional, las moléculas siguen trayectorias geodésicas, por lo tanto, la aceleración molecular puede escribirse en términos de la curvatura inducida por el campo. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\dot{v}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\alpha v^\beta. \quad (124)$$

El cálculo se desarrolla de manera análoga al trabajo realizado acerca del efecto Benedicks presentado en la referencia [55], donde se analiza el efecto relativista de un campo electrostático, sobre el flujo de calor. En lugar de la expresión (124), se hace uso de la aproximación de gravedad linealizada (ver apéndice J); la aceleración de las moléculas, \dot{v}^μ , se escribe entonces en términos de un tensor de campo gravitacional $F^{\mu\alpha}$ (análogo al tensor electrostático), de modo que la ecuación (123) queda como sigue:

$$v^\alpha f_{,\alpha} - F^{\mu\alpha} v_\alpha \frac{\partial f}{\partial v^\mu} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}, \quad (125)$$

El tensor del campo gravitacional tiene la siguiente forma:

$$F^{\mu\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_1/c \\ 0 & 0 & 0 & g_2/c \\ 0 & 0 & 0 & g_3/c \\ -g_1/c & -g_2/c & -g_3/c & 0 \end{bmatrix} \quad (126)$$

Se usa el método de Chapman y Enskog para establecer la siguiente solución propuesta de la ecuación de Boltzmann en el régimen de Navier-Stokes: $f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)}$, donde $f^{(1)}$ es una corrección en primer orden en los gradientes a la función de distribución de equilibrio local $f^{(0)}$. Al sustituir la solución formal en la ecuación de Boltzmann (125) y despreciando los términos en los gradientes de segundo orden y mayores resulta:

$$f^{(1)} = -\tau \left\{ v^\alpha f_{,\alpha}^{(0)} - F^{\mu\alpha} v_\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v^\mu} \right\}. \quad (127)$$

Por otro lado, usando la hipótesis de equilibrio local, se escriben las derivadas de $f^{(0)}$ como:

$$f_{,\alpha}^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T_{,\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} n_{,\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathcal{U}^\mu} \mathcal{U}_{;\alpha}^\mu, \quad (128)$$

y sustituyendo las expresiones para las derivadas de $f^{(0)}$ (ver apéndice E), se tiene que:

$$f_{,\alpha}^{(0)} = f^{(0)} \left\{ \frac{n_{,\alpha}}{n} - \left[1 - \frac{\gamma^{(k)}}{z} + \frac{1}{2z} \left(\frac{\mathcal{K}_1(1/z)}{\mathcal{K}_2(1/z)} + \mathcal{G}(1/z) \right) \right] \frac{T_{,\alpha}}{T} + \frac{v_\mu}{zc^2} \mathcal{U}_{;\alpha}^\mu \right\}, \quad (129)$$

donde $\mathcal{G}(1/z) = \frac{\mathcal{K}_3(1/z)}{\mathcal{K}_2(1/z)}$ y $\gamma^{(k)}$ es el factor de Lorentz para la velocidad caótica [12] de las moléculas (k^l). Por otro lado, la velocidad v^α puede escribirse como $v^\alpha = v^\mu h_\mu^\alpha + \gamma^{(k)} \mathcal{U}^\alpha$ [12].

Sabiendo ésto resulta que:

$$v^\alpha f_{,\alpha}^{(0)} = f^{(0)} v_\mu h^{\alpha\mu} \left\{ \frac{n_{,\alpha}}{n} - \left[1 - \frac{\gamma^{(k)}}{z} + \frac{1}{2z} \left(\frac{\mathcal{K}_1(1/z)}{\mathcal{K}_2(1/z)} + \mathcal{G}(1/z) \right) \right] \frac{T_{,\alpha}}{T} + \frac{v_\mu}{zc^2} \mathcal{U}_{;\alpha}^\mu \right\} +, \\ \gamma^{(k)} \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{cm} + \frac{v_\mu}{zc^2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^\mu}{\partial t} \right)_{cm} - \left[1 - \frac{\gamma^{(k)}}{z} + \frac{1}{2z} \left(\frac{\mathcal{K}_1(1/z)}{\mathcal{K}_2(1/z)} + \mathcal{G}(1/z) \right) \right] \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{cm} \right\}, \quad (130)$$

donde el subíndice cm implica una derivada calculada en el sistema comóvil y el término $\gamma^{(k)} \frac{v_\mu}{zc^2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^\mu}{\partial t} \right)_{cm}$ es la contribución del campo gravitacional. A continuación, se usan las ecuaciones de Euler para expresar los gradientes temporales en términos de gradientes espaciales.

El último término de la ecuación (127), se puede escribir como

$$-F^{\mu\alpha}v_\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v^\mu} = -F^{\mu\alpha}v_\alpha \frac{\mathcal{U}_\mu}{zc^2} f^{(0)}. \quad (131)$$

Con la finalidad de establecer el equivalente a la ley de Tolman fuera del equilibrio, resulta necesario obtener la expresión para el flujo de calor, para lo cual necesitamos la forma explícita de $f^{(1)}$. Para ello, se sustituyen las ecuaciones (130, 131, 248 - 250) en la ecuación (127). A continuación sólo se indica la contribución del gradiente del potencial gravitacional, por ser el objetivo de este cálculo:

$$f_{[g]}^{(1)} = -\tau \frac{1}{zc^2} f^{(0)} \left(-\gamma_{(k)} v_\mu \frac{nm}{\tilde{\rho}} F^{\alpha\mu} + v_\mu F^{\alpha\mu} \right). \quad (132)$$

Es conveniente hacer notar que el primer término dentro de los paréntesis toma en cuenta efectos macroscópicos y tiene como factor una $\gamma_{(k)}$, el segundo término toma en cuenta la dimensión microscópica y carece del factor gamma. Es por ello que en el límite no relativista, la contribución del gradiente del potencial gravitacional a la corrección a primer orden en los gradientes de la función de distribución se hace cero ($\gamma_{(k)} \sim 1$, $\tilde{\rho} \sim nm$). Además, usando la aproximación de gravedad linealizada (ver apéndice J), se puede escribir el tensor de campo en términos del gradiente del potencial gravitacional (g^l), y de la velocidad caótica, de forma que, para las componentes espaciales, la ecuación de movimiento para una partícula en el campo gravitacional puede escribirse como:

$$v_\mu F^{a\mu} = v_4 F^{a4} = -\gamma_{(k)} g^a. \quad (133)$$

En el sistema comóvil, la sustitución de esta expresión en (132) da lugar a:

$$f_{[g]}^{(1)} = -\tau f^{(0)} \gamma_{(k)} \frac{k_a g^a}{zc^2} \left(\frac{\gamma_{(k)}}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right). \quad (134)$$

A continuación se procederá al cálculo del flujo de calor, partiendo de la definición aplicable a un fluido relativista, en el régimen de Navier Stokes en el sistema comóvil [6]:

$$J_{[Q]}^\ell = mc^2 \int k^\ell f^{(1)} \gamma_{(k)}^2 d^*K, \quad (135)$$

donde d^*K es el elemento invariante en el espacio de velocidades [56]. Al sustituir en $f^{(1)}$ la expresión para la contribución del gradiente del potencial gravitacional ($f_{[g]}^{(1)}$) resulta que la contribución de este potencial al flujo de calor es:

$$J_{[Q_g]}^\ell = -\frac{\tau m}{z} \int k^\ell f^{(0)} \gamma_{(k)}^3 k_a g^a \left(\frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right) d^*K. \quad (136)$$

La expresión $k^\ell k_a g^a$ corresponde al arreglo vectorial:

$$k^\ell k_a g^a = \begin{pmatrix} k^1(k_1 g^1 + k_2 g^2 + k_3 g^3) \\ k^2(k_1 g^1 + k_2 g^2 + k_3 g^3) \\ k^3(k_1 g^1 + k_2 g^2 + k_3 g^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k^1)^2 g^1 + k^1 k_2 g^2 + k^1 k_3 g^3 \\ k^2 k_1 g^1 + (k^2)^2 g^2 + k^2 k_3 g^3 \\ k^3 k_1 g^1 + k^3 k_2 g^2 + (k^3)^2 g^3 \end{pmatrix}. \quad (137)$$

Al considerarse la expresión (136), y emplear argumentos de paridad, es posible extraer g^a de la integral. De forma que:

$$\int k^\ell k_a g^a f^{(0)} \left(\frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right) d^*K = \int f^{(0)} \left(\frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right) \begin{pmatrix} (k^1)^2 g^1 \\ (k^2)^2 g^2 \\ (k^3)^2 g^3 \end{pmatrix} d^*K. \quad (138)$$

Si se toma en cuenta que $k^2 = (k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2$, se obtiene que la contribución gravitacional al flujo de calor es la siguiente:

$$J_{[Q_g]}^\ell = -\frac{\tau m}{3z} g^\ell \int f^{(0)} k^2 \gamma_{(k)}^3 \left(\frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right) d^*K. \quad (139)$$

Para realizar el cálculo expresado en la ecuación (139), se escribe [35, 56] $d^*K = 4\pi \gamma_{(k)}^4 k^2 dk$ y se sustituye $f^{(0)}$ por $f_{RE}^{(0)} = \frac{n}{4\pi c^3 \mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} e^{-\frac{\gamma(k)}{z}}$:

$$J_{[Q_g]}^\ell = -\frac{\tau m}{3z} g^\ell \frac{n}{c^3 \mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} \int_0^c e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} k^4 \gamma_{(k)}^7 \left(\frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right) dk, \quad (140)$$

luego se realiza el cambio de variable $k = \beta c$, con lo que se tiene:

$$J_{[Q_g]}^\ell = -\frac{\tau m}{3z} g^\ell \frac{c^2 n}{\mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} \int_0^1 e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} \beta^4 \gamma_{(k)}^7 \left(\frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right) d\beta, \quad (141)$$

finalmente se utiliza un nuevo cambio de variable $\beta = \left(1 - \frac{1}{\gamma_{(k)}^2} \right)^{1/2}$, de forma que la integral a resolver es la siguiente:

$$J_{[Q_g]}^\ell = -\frac{\tau m}{3z} g^\ell \frac{c^2 n}{\mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma_{(k)} - 1)^{3/2} \gamma_{(k)} \left(\frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right) d\gamma. \quad (142)$$

La ecuación constitutiva para el término gravitacional en el flujo de calor puede entonces escribirse como (ver apéndice K):

$$J_{[Q_g]}^\ell = -L_{gT}g^\ell, \quad (143)$$

donde

$$L_{gT} = \frac{nk_B T}{z} \tau \left[5z + \frac{1}{\mathcal{G}(1/z)} - \mathcal{G}(1/z) \right]. \quad (144)$$

El coeficiente L_{Tg} tiende a cero a medida que z se acerca a cero (límite no relativista) y se acerca a un valor asintótico cuando $z \gg 1$ (sistemas ultrarelativistas). Este comportamiento puede observarse en la figura 4.

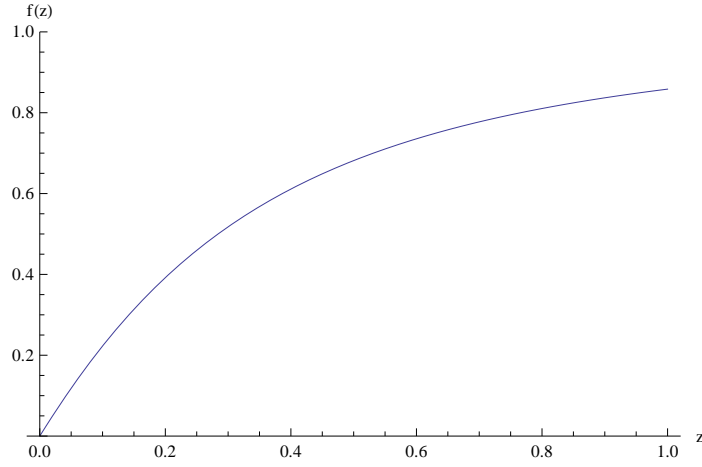


Figura 4. Gráfica de $f(z) = \frac{L_{Tg}}{nk_B T \tau}$ como función de z que muestra el comportamiento del coeficiente que acopla el flujo de calor con el campo gravitacional. El coeficiente tiende a cero para valores pequeños de z (régimen no relativista) y se acerca a un valor asintótico constante para valores de $z \gg 1$ (régimenes ultrarelativistas).

Si añadimos la contribución de un campo gravitacional a la ecuación (45), con las aproximaciones descritas en este capítulo, el flujo de calor se expresará de la siguiente manera:

$$J_{[Q]}^\nu = -h_\mu^\nu \left(L_{TT} \frac{T^{\cdot\mu}}{T} + L_{nT} \frac{n^{\cdot\mu}}{n} + L_{gT} g^\mu \right). \quad (145)$$

La ecuación (145) nos indica que un flujo de calor, en un fluido simple relativista, puede generarse por un gradiente de temperatura, igual que en el caso no relativista, pero también por un gradiente de densidad [6] y por un gradiente de un potencial gravitacional. La presencia de un campo gravitacional genera un flujo de calor cuando las temperaturas son lo

suficientemente altas como para generar efectos relativistas. En el siguiente capítulo se verá que el campo gravitacional también presenta una contribución en la producción de entropía. En el régimen relativista, el flujo de calor también puede generarse por la presencia de un campo eléctrico [55]. En la ecuación (145) se puede observar la manera en que el flujo de calor está relacionado únicamente con fuerzas termodinámicas.

Con la finalidad de relacionar la ecuación (145) con la ley de Tolman, se supone un estado de equilibrio termodinámico, y por tanto se toma el flujo de calor igual a cero. En ese caso, se tiene que los gradientes de densidad, temperatura y del potencial gravitacional se compensan entre sí, de modo que su suma algebraica resulte nula:

$$L_{gT}g^l = -L_{TT}\frac{T^{,l}}{T} - L_{nT}\frac{n^{,l}}{n}. \quad (146)$$

Las expresiones completas de los coeficientes L_{TT} y L_{nT} son respectivamente las expresiones (46) y (47).

Es importante hacer notar que la contribución al flujo total de calor es de orden cero en z para el gradiente de temperatura, pero de primer orden para el gradiente de densidad y de potencial gravitacional, lo que hace que la contribución del gradiente de temperatura sea la más importante cuando z es pequeña. Si se limita el estudio a un fluido homogéneo, que es el estudiado por Richard C. Tolman [54], el gradiente de densidad se hará cero, por lo que la siguiente expresión se satisface:

$$L_{gT}g^l = -L_{TT}\frac{T^{,l}}{T} \quad (147)$$

Al desarrollar en serie de Taylor los coeficientes L_{TT} y L_{gT} y tomando los términos hasta el primer orden en z tenemos, para L_{TT} [6]:

$$L_{TT} = \frac{5}{2} \frac{nk_B^2 T^2}{m} \tau, \quad (148)$$

y para L_{Tg} :

$$L_{gT} = \frac{5}{2} \frac{nk_B^2 T^2}{mc^2} \tau. \quad (149)$$

Al sustituir las expresiones (148) y (149) en (147) resulta:

$$\frac{T^{,l}}{T} = -\frac{1}{c^2} g^l, \quad (150)$$

que es la forma publicada por Tolman de su ley, que expresa la forma en que un potencial gravitacional puede compensar un gradiente de temperatura para mantener el equilibrio termodinámico. Cabe señalar aquí que resulta común la confusión entre la ley de Tolman y la ecuación constitutiva de Eckart para el flujo de calor. En una situación de equilibrio termodinámico, el flujo de calor $J_{[Q]}^l = -h^{\mu\nu} \kappa_{th} \left(T_{,\nu} + \frac{T}{c^2} \dot{\mathcal{U}}^\mu \right)$ se hace cero, por lo que $\frac{T_{,\nu}}{T} = -\frac{1}{c^2} \dot{\mathcal{U}}^\mu$. La confusión aparece entre los términos g^ℓ y $\dot{\mathcal{U}}^\mu = a^\mu$; el primero tiene que ver con el campo gravitatorio y el segundo es la aceleración hidrodinámica del fluido.

Tolman llegó a la expresión (150), usando argumentos puramente fenomenológicos y termostáticos [54], las ideas y cálculos de este capítulo pueden consultarse también en la referencia [12].

VI. PRODUCCIÓN DE ENTROPÍA: CÁLCULO FUNDAMENTADO EN LA TEORÍA CINÉTICA RELATIVISTA

A. Cálculo de la producción de entropía según el enfoque fenomenológico, caso no relativista

En esta sección se deduce una expresión fenomenológica para el calor no compensado de Clausius (producción de entropía). El cálculo derivado de la teoría cinética se describirá en la siguiente sección. El enfoque fenomenológico parte de que la densidad de entropía por partícula (s) se puede expresar, en el caso de un fluido simple, en función de dos variables de estado, pudiéndose escribir:

$$s = s(n, e_{int}), \quad (151)$$

con e_{int} la densidad de energía interna y n la densidad de partículas.

La derivada total de la densidad de entropía viene dada por:

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial n} \right)_{e_{int}} \left(\frac{dn}{dt} \right) + \left(\frac{\partial s}{\partial e_{int}} \right)_n \left(\frac{de_{int}}{dt} \right). \quad (152)$$

Ahora bien, de la termostática se sabe que [16, 18]:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial n} \right)_{e_{int}} = \frac{\beta}{k_T} \quad y \quad \left(\frac{\partial s}{\partial e_{int}} \right)_n = \frac{1}{T}, \quad (153)$$

donde $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ es el coeficiente de expansión volumétrica, V es el volumen y $k_T = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ es la compresibilidad isotérmica. Las derivadas temporales están dadas por la ecuación de continuidad (52):

$$\frac{\partial(n)}{\partial t} + n\theta = 0,$$

y la de conservación de la energía que por conveniencia se escribe como [18]:

$$\frac{\partial e_{int}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_{[Q]} = \text{términos disipativos}, \quad (154)$$

en este estudio los términos disipativos se desprecian. Al realizar las sustituciones de las ecuaciones (52) y (154) resulta:

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\beta}{k_T} \right) (-n\theta) + \left(\frac{1}{T} \right) \left(-\nabla \cdot \vec{J}_{[Q]} - p \nabla \cdot \vec{U} \right). \quad (155)$$

Como $\theta = \nabla \cdot \vec{U}$ y usando la ecuación de estado $p = nk_B T$ se tiene que:

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\beta}{k_T}\right) (-n\theta) + \left(\frac{1}{T}\right) \left(-\nabla \cdot \vec{J}_{[Q]} - nk_B T \theta\right). \quad (156)$$

Usando la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}_{[Q]}}{T}\right) = \frac{\nabla \cdot (\vec{J}_{[Q]})}{T} - \frac{\vec{J}_{[Q]} \cdot \nabla T}{T^2}, \quad (157)$$

la ecuación (155) se puede escribir como:

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\vec{J}_{[Q]} \cdot \nabla T}{T^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}_{[Q]}}{T}\right). \quad (158)$$

Se define el flujo de entropía como $\vec{J}_{[s]} = \frac{\vec{J}_{[Q]}}{T}$, por lo que la ecuación (158) se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{ds}{dt} + \nabla \cdot (\vec{J}_{[s]}) = -\frac{\vec{J}_{[Q]} \cdot \nabla T}{T^2}. \quad (159)$$

Esta ecuación tiene la forma de una ecuación de balance con un término fuente, si se identifica el miembro derecho con la producción de entropía, denotada por σ , se puede escribir que:

$$\sigma = -\frac{1}{T^2} \vec{J}_{[Q]} \cdot \nabla T. \quad (160)$$

Además, al asumirse la validez de la ley de Fourier, tenemos que:

$$\vec{J}_{[Q]} = -\kappa_{th} \nabla T, \quad (161)$$

por lo que la producción de entropía se expresa como:

$$\sigma = \kappa_{th} \frac{(\nabla T)^2}{T^2}, \quad (162)$$

y se puede afirmar que

$$\sigma \geq 0, \quad (163)$$

esta ecuación resulta útil para interpretar físicamente lo que significa que la producción de entropía sea semidefinida positiva: se trata del producto de un coeficiente de transporte

(conductividad térmica) y un término al cuadrado (positivo siempre); si el producto debe ser positivo, entonces la conductividad térmica debe serlo también (o cero), hecho que concuerda con el experimento (ver [1]).

B. Cálculo de la producción de entropía en el caso no relativista, según el enfoque de la teoría cinética

En esta sección se procederá al cálculo de la producción de entropía en el mismo caso que en la sección anterior, esto es, para un fluido simple, diluido y en ausencia de fuerzas externas, pero según el enfoque de la teoría cinética. Se parte de la ecuación de Boltzmann en ausencia de fuerzas externas:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = J(ff'), \quad (164)$$

se multiplica cada miembro de la ecuación por $-k_B \ln f$:

$$-k_B \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \ln f - k_B \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \right) \ln f = -k_B J(ff') \ln f, \quad (165)$$

se integra sobre el espacio de velocidades:

$$-k_B \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \ln f d\vec{v} - k_B \int \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \right) \ln f d\vec{v} = -k_B \int J(ff') \ln f d\vec{v}. \quad (166)$$

A continuación, se utiliza la definición de la teoría cinética para la producción de entropía [1, 18]:

$$\sigma = -k_B \int J(ff') \ln f d\vec{v}, \quad (167)$$

Se usa el método de Chapman-Enskog por lo que se puede escribir que $f = f^{(0)}(1 + \varphi)$, donde $\varphi = \frac{\varepsilon f^{(1)}}{f^{(0)}}$ (cabe mencionar que esto es equivalente a tomar $f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)}$) y la producción de entropía adquiere la forma:

$$\sigma = -k_B \int J(ff') \ln[f^{(0)}(1 + \varphi)] d\vec{v}, \quad (168)$$

a continuación se separa el logaritmo,

$$\sigma = -k_B \int J(ff') [\ln(f^{(0)}) + \ln(1 + \varphi)] d\vec{v}, \quad (169)$$

y se separa la integral:

$$\sigma = -k_B \int J(ff') \ln(f^{(0)}) d\vec{v} - k \int J(ff') \ln(1 + \varphi) d\vec{v}. \quad (170)$$

Se hace uso de la jerarquización que nos permite realizar la teoría cinética, y se escribe la producción de entropía como la suma de los siguientes términos:

$$\sigma = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)}, \quad (171)$$

dado que en equilibrio no hay producción de entropía ($\sigma^{(0)} = 0$), entonces:

$$\sigma^{(1)} = -k_B \int J(ff') [\ln(1 + \varphi)] d\vec{v} \quad (172)$$

y como $\ln(1 + x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$, para $x \ll 1$ entonces,

$$\sigma^{(1)} \simeq -k_B \int J(ff') \varphi d\vec{v}. \quad (173)$$

Si se utiliza la aproximación BGK (48) se tendrá que

$$\sigma^{(1)} \simeq \frac{k_B}{\tau} \int \varphi^2 f^{(0)} d\vec{v} \geq 0, \quad (174)$$

lo que concuerda con lo que estipula la segunda ley de la termodinámica: la producción de entropía es semidefinida positiva. Para demostrar que el resultado anterior no depende de la aproximación usada, a continuación se desarrolla la demostración pertinente. Sin utilizar la aproximación BGK se tendrá que:

$$\sigma^{(1)} = -k_B \int J(ff') \varphi d\vec{v}, \quad (175)$$

e identificando $\sigma^{(1)}$ con la parte derecha de la ecuación de Boltzmann, resulta:

$$\sigma^{(1)} = -k_B \int \left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{r}} \right] \varphi d\vec{v}. \quad (176)$$

La derivada temporal de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (ver apéndice E) puede escribirse como:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{u}} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (177)$$

Sin pérdida de generalidad se puede continuar el cálculo en el sistema comóvil, en el cual se hace $\vec{u} = \vec{0}$, entonces se tiene que $\vec{v} = \vec{c}$; por la ecuación de continuidad, dado que $-\nabla(n \cdot \vec{u}) = 0$, entonces $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$; igualmente, dado que $-p\nabla \cdot \vec{u} = 0$, entonces, sustituyendo

la ecuación del gas ideal resulta que $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Realizando estas sustituciones, se encuentra que la producción de entropía es,

$$\sigma^{(1)} = -k_B \int \left(-\frac{nk_B}{nm} \vec{\nabla} T \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{u}} + \zeta \vec{\nabla} T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \right) \varphi d\vec{\zeta}. \quad (178)$$

Al sustituir las derivadas de la distribución de Maxwell-Boltzmann (ver apéndice E):

$$\sigma^{(1)} = -k_B \int \left[\frac{\vec{\nabla} T}{T} \cdot \zeta f^{(0)} + \zeta \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} \left(-\frac{3}{2} + \frac{mc^2}{2k_B T} \right) f^{(0)} \right] \varphi d\vec{\zeta}. \quad (179)$$

Se reordenan los términos para identificar el flujo de calor $\vec{J}_{[Q]} = \int \frac{1}{2} mc^2 \zeta f^{(0)} \varphi d\vec{\zeta}$, con lo que resulta:

$$\sigma^{(1)} = -\frac{\vec{\nabla} T}{T^2} \cdot \vec{J}_{[Q]} - \frac{\vec{\nabla} T}{T^2} \cdot \vec{J}_{[Q]}^{(e)}, \quad (180)$$

donde

$$\vec{J}_{[Q]}^{(e)} = \int \frac{5}{2} k_B T \zeta f^{(0)} \varphi d\vec{\zeta}, \quad (181)$$

corresponde al flujo de entalpía, siendo ésta $h = \frac{5}{2} k_B T$ para un gas ideal.

En el régimen no relativista, el flujo de calor se presenta cuando existe un gradiente de temperaturas no nulo y la correspondiente producción de entropía viene expresada por $\sigma = \sigma^{(1)} = -\frac{\vec{\nabla} T}{T^2} \cdot \vec{J}_{[Q]}$, el término adicional $-\frac{\vec{\nabla} T}{T^2} \cdot \vec{J}_{[Q]}^{(e)}$, es nulo en el caso que nos ocupa, que es un gas simple, lo que se demuestra enseguida. La integral cuyo valor se demostrará que es cero se reduce a:

$$\vec{J}_{[Q]}^{(e)} = \int h \zeta f^{(0)} \varphi d\vec{\zeta} = h \int \vec{\zeta} f^{(0)} \varphi d\vec{\zeta}. \quad (182)$$

La demostración hace uso de la ecuación de Boltzmann, escrita usando la aproximación BGK para el término colisional:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}, \quad (183)$$

con $f = f^{(0)} + f^{(1)}$ resulta

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{r}} = -\frac{f^{(1)}}{\tau}, \quad (184)$$

de donde,

$$f^{(1)} = -\tau \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{r}} \right), \quad (185)$$

que, al sustituir la expresión para las derivadas,

$$f^{(1)} = -\tau \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \right) \right). \quad (186)$$

Por la ecuación de continuidad se sabe que $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ y por la de balance de energía que $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, por lo que queda por calcular la siguiente integral:

$$\int \vec{\zeta} f^{(0)} \varphi d\vec{\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{5}{2} + \frac{mc^2}{2k_B T} \frac{\vec{\nabla} T}{T} \cdot \vec{\zeta} \right) d\vec{\zeta}. \quad (187)$$

Al resolver esta integral resulta exactamente igual a cero. Por lo que la expresión para la entropía en el régimen no relativista es exactamente igual a:

$$\sigma^{(1)} = -\frac{\vec{\nabla} T}{T^2} \cdot \vec{J}_{[Q]}. \quad (188)$$

Se puede expresar todavía la producción de entropía escribiendo el flujo de calor, a través de la ley de Fourier, en términos del gradiente de temperatura, quedando la expresión como sigue:

$$\sigma^{(1)} = \kappa_{th} \frac{(\vec{\nabla} T)^2}{T^2}, \quad (189)$$

esta expresión es la misma que la ecuación (162) según el enfoque fenomenológico. La ventaja de la teoría cinética es que se obtiene la expresión de primeros principios.

C. Cálculo de la producción de entropía en presencia de fuerzas externas en relatividad especial, según el enfoque de la teoría cinética

En esta sección se realizará el cálculo de la producción de entropía para un fluido simple, relativista, no degenerado, *en presencia de fuerzas externas*, haciendo uso de las técnicas de la teoría cinética. Al estudiar el caso relativista, resulta evidente usar la función de Jüttner en lugar de la de Maxwell-Boltzmann.

Se seguirán fundamentalmente los mismos pasos que en la sección anterior, por lo tanto, se parte de la ecuación de Boltzmann:

$$v^\alpha f_{,\alpha} + \dot{v}^\mu \frac{\partial f}{\partial v^\mu} = J(ff'), \quad (190)$$

se multiplica cada miembro de la ecuación por $-k_B \ln f$ y se integra sobre el espacio de velocidades:

$$-k_B \int v^\alpha f_{,\alpha} (\ln f) d^*v - k_B \int \dot{v}^\mu \frac{\partial f}{\partial v^\mu} (\ln f) d^*v = -k_B \int J(ff') (\ln f) d^*v, \quad (191)$$

donde d^*v es el elemento invariante en el espacio de velocidades.

En este paso, nuevamente se identifica el lado derecho de la ecuación (191) con la producción de entropía. Sin embargo, dado que el tratamiento del término \dot{v}^μ es muy importante, se realizará un paréntesis en el cálculo para analizarlo. La aceleración de las moléculas se puede modelar con las siguientes tres opciones:

- A través de un campo gravitacional débil, con una aproximación tipo Poisson, la ecuación de campo correspondiente es

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho G, \quad (192)$$

donde Φ es el potencial gravitacional, ρ la densidad de masa del cuerpo y G la constante de gravitación universal; de forma que:

$$\dot{v}^\mu = -\Phi^{,\ell}. \quad (193)$$

- Puede hacerse con un campo gravitacional menos débil, del tipo de las ecuaciones de Maxwell, cuya ecuación de campo es:

$$F_{,\nu}^{\mu\nu} = \frac{4\pi G}{c^2} J^\mu, \quad (194)$$

de modo que

$$\dot{v}^\mu = cv^\alpha F_\alpha^\mu, \quad (195)$$

que presenta una gran analogía con el caso electrostático, y conduce al efecto Benedicks [55]. $F^{\mu\nu}$ es el análogo del tensor de Faraday para el caso gravitacional, y J^μ es un flujo másico.

- Otra opción, para campos intensos, corresponde al uso de las ecuaciones de Einstein; la ecuación de campo se expresa entonces de la siguiente forma:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (196)$$

donde $G^{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T^{\mu\nu}$ el tensor impulso-energía; en este caso

$$\dot{v}^\mu = -\Gamma_{\alpha\lambda}^\mu v^\alpha v^\lambda, \quad (197)$$

donde la *gamma* (Γ) representa un símbolo de Christoffel (ver apéndice C). Ahora bien, con el objetivo de proceder formalmente como en el caso del análisis del efecto Benedicks [55], se decidió trabajar con una ecuación de campo del tipo de las ecuaciones de Maxwell, de modo que se está trabajando en el llamado régimen de la gravedad linealizada (ver apéndice J). Es importante observar que en esta aproximación el tensor de campo corresponde a:

$$F_\alpha^\mu = -\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha 4}^\mu, \quad (198)$$

y así, en este régimen, la aceleración de la partícula que será sustituida en la ecuación de Boltzmann viene dada por la expresión:

$$\dot{v}^\mu = v^\alpha c F_\alpha^\mu = -\frac{1}{2}v^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^\mu, \quad (199)$$

donde la métrica newtoniana es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1 + \frac{\Phi}{c^2}) \end{bmatrix}. \quad (200)$$

De esta forma, en relatividad general se podría decir que el tensor de campo utilizado corresponde a un efecto de la curvatura. En la aproximación de gravedad linealizada (ver apéndice J), se tiene entonces la siguiente relación:

$$\dot{v}^\ell = -\frac{1}{2}v^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^\ell = -\frac{1}{2}(v^1 \Gamma_{14}^\ell + v^2 \Gamma_{24}^\ell + v^3 \Gamma_{34}^\ell + v^4 \Gamma_{44}^\ell) = -\frac{1}{2}(\Gamma_{44}^\ell) = -\Phi^{,\ell}. \quad (201)$$

Para continuar con el cálculo de la producción de entropía se retoma el procedimiento de la sección anterior y se realizan los cálculos con la parte izquierda de la ecuación de Boltzmann. Se hace uso de la distribución de Jüttner:

$$f_{RE}^{(0)} = \frac{ne^{\frac{u^\beta v_\beta}{zc^2}}}{4\pi c^3 z \mathcal{K}_2(1/z)}, \quad (202)$$

y se sustituye la derivada total respecto al tiempo propio de $f_{RE}^{(0)}$. De acuerdo al método de Chapman-Enskog [37] se propone la solución de la forma $f_{RE} = f_{RE}^{(0)}(1 + \varphi)$ con $\varphi = \frac{\varepsilon f_{RE}^{(1)}}{f_{RE}^{(0)}}$, que es la corrección a primer orden en los gradientes. De nuevo se usa la jerarquización, según el parámetro de Knudsen, para escribir la producción de entropía como la suma de dos términos:

$$\sigma = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)}. \quad (203)$$

El término $\sigma^{(0)}$ es cero debido a que no hay producción de entropía en equilibrio. Luego se sustituye la aproximación para el logaritmo, usada en la sección anterior:

$$\sigma \simeq -k_B \int \varphi J(ff') d^*v. \quad (204)$$

El término colisional está dado por la expresión:

$$J(ff') = v^\alpha f_{,\alpha}^{(0)} + \dot{v}^\mu \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v^\mu}, \quad (205)$$

por lo que la producción de entropía viene dada por:

$$\sigma = -k_B \int \varphi \left(v^\alpha f_{,\alpha}^{(0)} + v^\alpha c \Gamma_{\alpha^4}^\mu \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v^\mu} \right) d^*v. \quad (206)$$

El próximo paso consiste en calcular el escalar $v^\alpha f_{,\alpha}^{(0)}$ en el sistema comóvil, recuérdese que en este caso la velocidad de las moléculas es la caótica y está dada por $K^\alpha = \gamma_{(k)} \left[\vec{k}, c \right]$, con $\gamma_{(k)} = \left(\sqrt{1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{c^2}} \right)^{-1/2}$. Resulta conveniente descomponer la velocidad molecular de la siguiente manera [12]:

$$v^\alpha = v^\beta h_\beta^\alpha + \gamma_{(k)} \mathcal{U}^\alpha, \quad (207)$$

donde $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}$ es el proyector espacial (ver apéndice C), de modo que

$$v^\alpha f_{,\alpha}^{(0)} = \gamma_{(k)} k^i \delta_i^l f_{,\ell}^{(0)} |_{cm} + \gamma_{(k)} c f_{,4}^{(0)} |_{cm}, \quad (208)$$

donde se usó el hecho de que en el sistema comóvil (denotado por cm) se tiene que $h^{ij} = \delta^{ij}$ y $h^{4j} = 0$. Esta descomposición es útil porque más adelante se separarán las componentes espaciales y temporales.

En seguida se escribirán los términos $f_{,\ell}^{(0)}$ y $f_{,4}^{(0)}$:

$$v^\alpha f_{,\alpha}^{(0)} = \gamma_{(k)} k^i \delta_i^\ell \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} n_{,\ell} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T_{,\ell} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathcal{U}^\alpha} \mathcal{U}_{,\ell}^\alpha \right) + \gamma_{(k)} c \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} n_{,4} |_{cm} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T_{,4} |_{cm} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathcal{U}^\alpha} \mathcal{U}_{,4}^\alpha |_{cm} \right), \quad (209)$$

El término $\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathcal{U}^\alpha} \mathcal{U}_{,\ell}^\alpha$ no se toma en cuenta en el resto del cálculo porque corresponde al acoplamiento de los gradientes de la velocidad hidrodinámica con el tensor de esfuerzos, y el interés de este cálculo lo constituye la parte vectorial sin acoplamientos tensoriales. A continuación se sustituyen los valores de cada una de las derivadas de la función de distribución de Jüttner en equilibrio $f^{(0)}$, (ver apéndice E) escritas a continuación:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} = \frac{f^{(0)}}{n}, \quad (210)$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = \frac{f^{(0)}}{T} \left[1 - \frac{\gamma}{z} - \frac{1}{2z} \left(\frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} + \frac{\mathcal{K}_3}{\mathcal{K}_2} \right) \right], \quad (211)$$

que, por simplicidad se escribirá como:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = f^{(0)} \tilde{\eta}(z, T), \quad (212)$$

con $\tilde{\eta}(z, T) = \frac{1}{T} \left[1 - \frac{\gamma}{z} - \frac{1}{2z} \left(\frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} + \frac{\mathcal{K}_3}{\mathcal{K}_2} \right) \right]$. Para la derivada respecto de la velocidad de las partículas se tiene:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v^\mu} = f^{(0)} \frac{\mathcal{U}_\mu}{z c^2}, \quad (213)$$

y por último, la derivada de la función de Jüttner respecto de la velocidad hidrodinámica:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathcal{U}^\mu} = f^{(0)} \frac{v_\mu}{z c^2}. \quad (214)$$

El próximo paso consiste en utilizar las ecuaciones relativistas de Euler (ver apéndice F) para escribir las derivadas temporales en términos de los gradientes. Este paso es indispensable para asegurar la existencia de la solución al primer orden [57]. Por lo tanto, la expresión completa para la producción de entropía queda como sigue,

$$\begin{aligned} \sigma = & -k_B \int \varphi f^{(0)} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(\frac{1}{z})} \right) \frac{n_{,\ell}}{n} + \frac{T_{,\ell}}{T} \left(1 - \frac{\gamma(k)}{z} - \frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(\frac{1}{z})} - \frac{\mathcal{G}(\frac{1}{z})}{z} \right) \right] \right\} d^*K, \\ & -k_B \int \varphi f^{(0)} \left\{ -K^i h_{i\ell} \frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(\frac{1}{z})} \frac{1}{z} \Gamma_{44}^l + v^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{z c} \right\} d^*K, \end{aligned} \quad (215)$$

donde se expresó el elemento d^*v como d^*K ya que el elemento de volumen es invariante. Se sigue tomando la convención de que α toma valores de 1, 2, 3, 4, siendo los tres primeros valores los correspondientes a las coordenadas espaciales y el cuarto para la coordenada temporal; de la misma manera, l toma los valores de 1, 2, 3. El último término es una cantidad escalar que puede evaluarse en el sistema comóvil de tal manera que:

$$v^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{z c} = \frac{\gamma(k)}{z} k^\ell \Gamma_{\ell 4}^4, \quad (216)$$

donde ya se tomó en cuenta el hecho de que $\Gamma_{44}^4 = 0$ (ver apéndice J). Sustituyendo estos resultados la producción de entropía es:

$$\begin{aligned} \sigma = & k_B \int \varphi f^{(0)} \gamma(k) K^i h_i^\ell d^*k \left[\left(\frac{n_{,\ell}}{n} + \frac{1}{z} \Gamma_{\ell 4}^4 \right) \frac{1}{\mathcal{G}(\frac{1}{z})} + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\mathcal{G}(\frac{1}{z})} \right) \frac{T_{,\ell}}{T} \right] \\ & - \left(\frac{n_{,\ell}}{n} + \frac{T_{,\ell}}{T} + \frac{1}{z} \Gamma_{\ell 4}^4 \right) k_B \int \varphi f^{(0)} \gamma(k) K^i h_i^\ell d^*k, \end{aligned} \quad (217)$$

donde ℓ toma los valores de 1, 2, 3.

Las ecuaciones se escriben en el sistema comóvil, no sólo debido a una obvia simplificación de los cálculos, que no hace perder la generalidad de los resultados puesto que se está usando

la notación tensorial sino porque resulta necesario escribir el flujo de calor en este sistema puesto que el cálculo debe enfocarse en aquello que produce el calor, sin tomar en cuenta energía mecánica y otras contribuciones. Así pues, el siguiente paso consiste en identificar los flujos de calor y de entalpía con la finalidad de expresar la producción de entropía en términos de estos flujos. Recordando la definición de flujo de calor:

$$J_{[Q]}^\ell = mc^2 \int \mathbf{k}^\ell \gamma_{(k)} f^{(0)} \varphi d^*k = mc^2 \int \mathbf{k}^\ell \gamma_{(k)} f^{(1)} d^*k \quad (218)$$

y sabiendo que el flujo de entalpía puede escribirse como [1]:

$$J_{[Q]}^{\ell(e)} = mc^2 \int k^\ell f^{(0)} \varphi d^*k. \quad (219)$$

El flujo de entalpía se anula, al igual que en el caso no relativista. Esto sucede debido a que se trata de un fluido simple, en el caso de uno multicomponente, este flujo de entalpía es distinto de cero [58].

Se usa la relación (201), re-escrita aquí para mayor claridad: $-c^2 \Gamma_{44}^\ell = \Phi^{\cdot\ell}$ y, después de una manipulación algebraica directa se obtiene que la producción de entropía en un fluido simple, no degenerado y relativista depende de tres fuerzas termodinámicas (gradiente del potencial gravitacional, de la densidad de partículas y de la temperatura):

$$\sigma = -k_B J_{[Q]}^\ell \left[\left(\frac{1}{zc^2} \frac{1}{\mathcal{G}(1/z)} \right) \Phi^{\cdot\ell} - \frac{1}{\mathcal{G}(1/z)} \frac{n_{\cdot\ell}}{n} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\mathcal{G}(1/z)} \right) \frac{T_{\cdot\ell}}{T} \right] \quad (220)$$

Las dos primeras corresponden a efectos puramente relativistas y, en el límite donde $z \rightarrow 0$, la ecuación (160) se recupera.

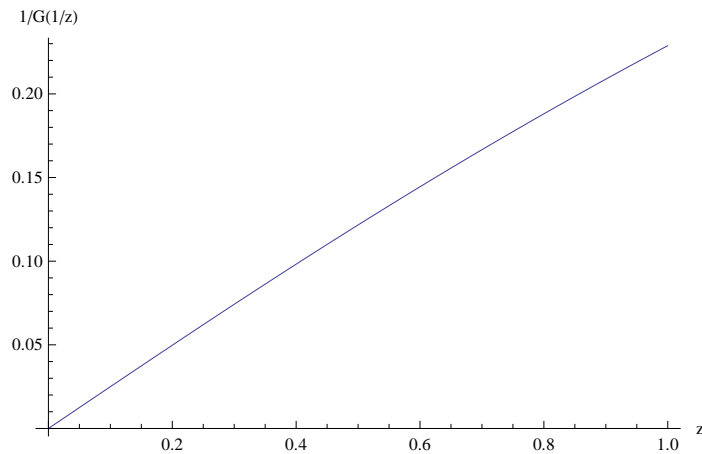


Figura 5. Comportamiento del coeficiente $1/\mathcal{G}(1/z)$ que acopla la producción de entropía con los gradientes de un potencial gravitacional y de la densidad del número de partículas en un fluido relativista. El coeficiente se anula en $z = 0$ y toma un valor no despreciable para $z \geq 1$.

En la figura 5, el comportamiento de $\mathcal{G}(1/z)$ puede observarse, donde se presenta la gráfica de $1/\mathcal{G}(1/z)$ como función de z , resulta evidente que los dos primeros términos de (220) tienden a cero a medida que el fenómeno se torna clásico.

Al tomar el límite para $z \ll 1$ se tiene que $\frac{1}{\mathcal{G}(1/z)} \sim 1 - \frac{5}{2}z + \dots$, por lo que la producción de entropía resulta:

$$\sigma \sim -\frac{J_{[Q]}^\ell T_{,\ell}}{T^2}, \quad (221)$$

recuperando así el límite no relativista. Estos cálculos fueron realizados en presencia de un campo gravitacional, sin embargo, se pueden generalizar fácilmente a un campo conservativo arbitrario [14].

Los resultados presentados en este capítulo se relacionan directamente con los de la ley de Tolman, vista en el capítulo anterior. Al considerar que en un estado de equilibrio local no hay producción de entropía, $\sigma^{(0)} = 0$, lo que sucede en el caso relativista es que los gradientes (de densidad, de temperatura y del potencial gravitacional) se compensan entre sí y de esa manera se sostiene el estado de equilibrio. Por otro lado, si se limita el estudio al caso de un fluido homogéneo, el gradiente de densidad es cero, por lo que se tiene que un gradiente de temperatura se ve compensado por un campo gravitacional:

$$\left(\frac{1}{zc^2} \frac{1}{\mathcal{G}(1/z)}\right) \Phi_{,\ell} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\mathcal{G}(1/z)}\right) \frac{T_{,\ell}}{T}. \quad (222)$$

Si se desarrollan en serie de Taylor los términos entre paréntesis y se conservan los términos de primer orden en z , se recuperará la conocida ley de Tolman:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (223)$$

que fue establecida en 1930 por Richard C. Tolman [54] usando, como se mencionó en el capítulo anterior, únicamente argumentos fenomenológicos y de termostática.

VII. CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo se realiza el análisis de tres conceptos fundamentales relacionados con fluidos relativistas. El capítulo IV se dedica al análisis del principio de antecendencia desde un punto de vista novedoso dado que el concepto de *cono de frecuencias* no se encuentra reportado en la literatura previa a la referencia [11]. Los capítulos V y VI se enfocan al análisis de las relaciones entre las variables termodinámicas y las ecuaciones de transporte bajo la óptica de un formalismo alternativo al propuesto por Eckart en 1940, en el caso específico de la ecuación constitutiva del flujo de calor. Las patologías que presenta el formalismo de Eckart y que han sido ampliamente documentadas en la literatura especializada, han conducido a que muchos investigadores se inclinen por usar las técnicas de la termodinámica extendida, esto, hablando de los enfoques teóricos tradicionales (no se tocará aquí el tema del análisis numérico). Esta tesis se ha desarrollado con teorías de primer orden en los gradientes, en el marco de la teoría cinética.

La comunidad científica asumía, pues, que si se quería trabajar a primer orden en los gradientes, se debía hacer admitiendo las inestabilidades en las soluciones, en el sentido en que éstas divergen; y también con soluciones que no satisfacían el principio de antecendencia, comúnmente denominadas soluciones no causales. Sin embargo, en 2009 se demostró que las ecuaciones de transporte linealizadas no presentan inestabilidades genéricas en el régimen de Navier-Stokes, al utilizar la ecuación constitutiva para el flujo de calor de Eckart modificado [6].

En el capítulo IV, se demuestra que a nivel del régimen de Euler, el sistema de ecuaciones linealizadas no viola el principio de antecendencia. Éste genera un sistema hiperbólico y no uno parabólico. Lo que en el capítulo IV se presenta es una manera intuitiva de analizar la causalidad, en el contexto de la propagación de ondas térmicas. Este enfoque se fundamenta en dos elementos: el trabajar con el conjunto completo de ecuaciones de transporte, lo que conduce a un sistema hiperbólico y a la estimación de las rapidez características de propagación de las fluctuaciones. Como se mencionó, el límite no relativista para las rapidez de propagación de las fluctuaciones fue recuperado, como era de esperarse. Es importante recalcar que las fluctuaciones térmicas también satisfacen una ecuación diferencial parcial hiperbólica. En la mayoría de los libros de texto, el establecimiento de la ecuación -parabólica- de conducción de calor se basa en una extensión de la ecuación (56) incluyendo conducción

de calor pero despreciando las fluctuaciones de la velocidad (ver apéndice L). Por otro lado, si la ecuación de movimiento linealizada (59) se toma como base de la descripción de las fluctuaciones térmicas, entonces se obtiene una ecuación causal para el fluido no disipativo. Así pues, se sugiere que en el caso disipativo se debe de tomar en cuenta la generalización adecuada del sistema linealizado completo (56-59), haciendo hincapié en el papel de la ecuación (59) al analizar las propiedades causales del sistema. El *despreciar las fluctuaciones de la velocidad claramente conduce a problemas de causalidad*. El hecho de hacer $\delta\theta = 0$ no corresponde a una realidad física porque cuando el fluido está en reposo, la velocidad media es cero pero las fluctuaciones subsisten. Un cálculo similar, en la sección A del capítulo IV, muestra que las fluctuaciones en densidad (δn) también siguen una ecuación de tipo hiperbólico. Este resultado puede ser de utilidad para la validación de métodos numéricos en el caso no-lineal y, en general, para simplificar cálculos. También puede destacarse el hecho de que las fluctuaciones de densidad, al despreciarse las fluctuaciones térmicas, y, a su vez, las fluctuaciones térmicas, al despreciarse las fluctuaciones de densidad, presentan diferentes rapidezces de propagación, satisfaciéndose la relación $C_n^2 + C_T^2 = C_s^2$ [11]. Las expresiones aproximadas (86) y (87) pueden resultar útiles en situaciones particulares que involucran efectos disipativos. En estos casos, es complicado desacoplar el sistema de ecuaciones de transporte en el dominio espacial y el temporal. Sin embargo, ello puede lograrse en el espacio de Fourier-Laplace, donde el espectro de Rayleigh-Brillouin se puede establecer, este es el tema analizado en la sección B del mismo capítulo.

A nivel de Navier-Stokes, las soluciones resultan causales al usar la ecuación constitutiva para el flujo de calor que se ha llamado *formalismo modificado de Eckart*. Se desarrolló una prueba (sección B capítulo IV) que permite establecer si un conjunto de ecuaciones de transporte linealizadas conducen a una solución causal o no. Al realizarse los cálculos con el formalismo de Eckart, y con una z grande, el pico de Rayleigh invade los dos picos de Brillouin, entrando en *la región prohibida del cono de frecuencias*, esto indica que el problema de la no-causalidad se presenta debido al acoplamiento del flujo de calor con la aceleración. Aquí cabe señalar que, si bien este espectro se ha generado experimentalmente, sólo ha sido en el régimen clásico, en el relativista no, sin embargo, no parecen existir razones fundamentadas para suponer la no formación del espectro en este régimen. Por ejemplo, se ha podido identificar, para el caso relativista, una signatura relativista en la dispersión de Compton, cuando el fluido es tal que $z \sim 1$ y la radiación cósmica de microondas pasa

a través del fluido. Esto sí se ha detectado observacionalmente [59]. Si el fluido fuera más denso, habría dispersión Rayleigh-Brillouin además de dispersión Compton, pero este es un ejemplo de dispersión de luz donde aparecen efectos relativistas debido a propiedades del fluido.

En el capítulo V se demuestra, usando teoría cinética relativista, que en un fluido simple, inhomogéneo y relativista puede generarse un flujo de calor, no sólo a partir de un gradiente de temperatura y/o un gradiente de densidad sino también a partir de un potencial gravitacional linealizado, con una métrica newtoniana. Ya se sabía que un flujo de calor se genera cuando está presente un gradiente de temperatura en un fluido simple. Richard C. Tolman demostró, valiéndose de argumentos fenomenológicos y termostáticos, que un campo gravitacional linealizado puede equilibrar un gradiente de temperatura con la finalidad de lograr el equilibrio térmico.

Al analizar la ecuación (145) se observa que el flujo está acoplado únicamente con fuerzas canónicas. Adicionalmente, se observa la presencia de dos efectos cruzados presentes en un fluido *simple* relativista, estos efectos cruzados están ausentes en el caso de fluidos simples no relativistas, aún en presencia de fuerzas externas.

Si bien este estudio está centrado en la relatividad especial, en el capítulo V, se trabaja con geodésicas, que son la forma en que la relatividad general incorpora la presencia de fuerzas, sin embargo, se termina usando una expresión aproximada, vía la gravedad linealizada, cambiando el régimen nuevamente al de relatividad especial. El apéndice J describe la aproximación y el apéndice M muestra la ecuación de Boltzmann en relatividad especial y general. Dicha aproximación es la misma suposición realizada originalmente por Tolman.

El capítulo V pone de manifiesto, nuevamente, la potencia de la teoría cinética como herramienta exploratoria de los coeficientes de transporte de gases en presencia de campos gravitacionales intensos, poco estudiados en el pasado. La extensión del resultado presentado en este capítulo a espacio-tiempo no estático es un tema de sumo interés que será abordado en el futuro cercano.

El capítulo VI presenta el cálculo de la producción de entropía en un fluido simple relativista en presencia de un campo gravitacional. Es de hacer notar que la expresión (220) implica que, en este tipo de fluidos, no sólo es el gradiente de temperatura que produce entropía, sino también un gradiente de densidad y/o un gradiente de potencial gravitacional;

este resultado se puede extender fácilmente al caso en presencia de un campo electrostático [14]. Las aproximaciones realizadas en el capítulo VI toman sentido al analizar la analogía de este caso gravitacional con el caso electrostático, descrito con el efecto Benedicks [55]. Se decidió despreciar los términos no lineales (los productos de gamas) y usar una métrica newtoniana, de manera tal que la aceleración se pudiese modelar por la expresión

$$\dot{v}^\mu = -\Gamma_{44}^\mu c^2, \quad (224)$$

dichas aproximaciones se efectuaron en el ámbito de la relatividad general, con el fluido simple inmerso en un campo gravitacional, para poder analizar el fenómeno con ecuaciones tipo Maxwell, por el principio de equivalencia que hace que las masas se cancelen, cosa que no puede hacerse a la inversa. El equipo de trabajo especializado con el que tengo la oportunidad de colaborar, considera que el analizar a fondo la manera de expresar las fuerzas en relatividad especial y la curvatura en relatividad general, a través de estas analogías, contribuirá al esclarecimiento de puntos clave en las teorías unificadoras. En particular, abordar las analogías de este tipo que se presentan entre la teoría electromagnética y la gravitacional [60].

En los últimos tres capítulos se demuestra la utilidad de la teoría cinética al abordar, desde primeros principios y sin supuestos empíricos, tres situaciones específicas de fluidos diluidos, simples, relativistas y no degenerados. Además de los casos analizados aquí, en la literatura especializada se han venido publicando artículos sobre situaciones y fenómenos bajo esta nueva óptica, revelando que el uso de la ecuación constitutiva de flujo de calor modificada conduce a soluciones estables, causales y que predicen situaciones físicas observables o predichas numéricamente. Por ejemplo, en [55], se demuestra que en fluidos relativistas monocomponentes, el campo eléctrico genera flujo de calor. Paralelamente, en [61, 62] se muestra que el acoplamiento del flujo de calor con la aceleración también genera un efecto patológico en cuanto a formación de estructuras (astrofísicas); de hecho, conduce a resultados donde los efectos de la gravedad resultan despreciables, esto por supuesto contradice los datos proporcionados por las observaciones astronómicas. De manera tal que todo indica que la teoría cinética, en particular con esta ecuación constitutiva para el flujo de calor, permite un tratamiento novedoso, libre de inestabilidades (por lo menos en el sentido de las genéricas, detectadas por Hiscock y Lindblom) y de comportamientos no causales.

En contraparte, se debe admitir que la Termodinámica Irreversible Lineal [15], está limitada a funcionar en aquellos sistemas en equilibrio o, por lo menos, cerca del equilibrio, siendo que existen diversos fenómenos de la naturaleza que se desarrollan fuera de equilibrio como por ejemplo los medios viscoelásticos, los fluidos poliméricos y la formación de ondas de choque en la materia, en cuyos casos las ecuaciones linealizadas usadas en el análisis aquí presentado no describen apropiadamente estas dinámicas. Aún más, la ley de acción de masas, establecida por primera vez por Guldberg y Waage, que funciona en términos prácticos, no es explicada por la Termodinámica Irreversible Lineal [15]. A pesar de ello, la aportación de la teoría cinética, incluso en el régimen cercano al equilibrio local, se considera fundamental para desarrollos de tipo numérico que permiten abordar, si bien por el momento con muchas simplificaciones, las situaciones descritas que claramente se desarrollan fuera del equilibrio local.

Apéndices

A. Lista de términos más usados

Símbolo	Significado
$\mathcal{G}(\frac{1}{z})$	cociente $\mathcal{K}_3(1/z)/\mathcal{K}_2(1/z)$
k_T	compresibilidad isotérmica
k_B	constante de Boltzmann
κ_{th}	conductividad térmica
K^ν	cuadri-velocidad caótica relativista
\mathcal{U}^μ	cuadri-velocidad hidrodinámica
v^μ	cuadri-velocidad molecular
δ_α^μ	deta de Kronecker
n	densidad de partículas
$\Upsilon_{;\alpha}^\beta$	derivada covariante de Υ^β
ε	energía interna
S	entropía absoluta
s	entropía por partícula
$\gamma_{(p)}$	factor de Lorentz respecto de la tri-velocidad p
$J_{[Q]}^\beta$	flujo de calor
$f_{RE}^{(0)}$	función de distribución de Jüttner
$f_{NR}^{(0)}$	función de distribución de Maxwell-Boltzmann
$\mathcal{K}_n(1/z)$	función modificada de Bessel de orden n
$\Upsilon_{,\ell}$	gradiente de Υ
m	masa de una partícula
$g^{\alpha\beta}$	métrica
ϵ	parámetro de Knudsen
z	parámetro relativista
σ	producción de entropía
$h^{\alpha\beta}$	proyector espacial
c	rapidez de la luz
$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$	símbolo de Christoffel de segunda especie

t	tiempo
T	temperatura
k^ℓ	tri-velocidad caótica relativista
ω^μ	tri-velocidad molecular
Υ	variable termodinámica local arbitraria
\vec{r}	vector posición
ς	velocidad caótica no relativista
$\tilde{\rho}$	$\sim \frac{p+n\varepsilon}{c^2} = \frac{p+nm c^2}{c^2} = nm\mathcal{G}(\frac{1}{z})$

B. Kernel colisional

Se presenta el cálculo del número de partículas que entran y salen, por colisiones, de una región del espacio fase.

Se supone que las colisiones tienen lugar en el volumen $\tilde{\vartheta}\sigma d\Omega d^*v_1$, donde $\tilde{\vartheta}$ es un flujo de partículas invariante [34], que juega el papel de una velocidad relativa, $d^*v_1 = \frac{cd^3v_1}{v^4}$ es el diferencial de volumen en el espacio de velocidades y es un invariante [36], σ la sección transversal de la colisión entre un par de partículas y Ω el ángulo sólido correspondiente a la colisión.

Para las partículas cuyas velocidades antes de la colisión son (v, v_1) y posterior a la misma son (v', v'_1) , que ocurren entre todas las partículas con velocidad v_1 y una partícula con velocidad v en el tiempo dt , se tiene que el número total de colisiones es $\int f(\vec{r}, t, \vec{v})f(\vec{r}, t, \vec{v}_1)\tilde{\vartheta}\sigma d\Omega d^*v d^*v_1$; procediendo de manera análoga, para las colisiones inversas, inicialmente con velocidades (v', v'_1) y posteriormente con velocidades (v, v_1) , que ocurren entre todas las partículas con velocidad v'_1 y una partícula con velocidad v' en el tiempo dt , se tiene que el número total de colisiones es $\int f(\vec{r}, t, \vec{v}')f(\vec{r}, t, \vec{v}'_1)\tilde{\vartheta}\sigma d\Omega d^*v' d^*v'_1$. El número total de colisiones es la diferencia entre el número de colisiones de cada tipo, de modo que: $\int f(\vec{r}, t, \vec{v})f(\vec{r}, t, \vec{v}_1)\tilde{\vartheta}\sigma d\Omega d^*v d^*v_1 - \int f(\vec{r}, t, \vec{v}')f(\vec{r}, t, \vec{v}'_1)\tilde{\vartheta}\sigma d\Omega d^*v' d^*v'_1$, que por simplicidad se suele escribir como: $\int (f f_1 - f' f'_1)\tilde{\vartheta}\sigma d\Omega dw_1$,

C. Conceptos básicos de análisis tensorial

La notación tensorial permite formular matemáticamente las leyes físicas de manera independiente del sistema de referencia. La convención de Einstein para la suma de términos con índices repetidos es la siguiente:

$$a_\alpha x^\alpha = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4. \quad (225)$$

Un tensor *contravariante* es aquel que se transforma de un sistema de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^N) a otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ mediante la transformación:

$$\bar{A}^\beta = \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha. \quad (226)$$

Un tensor *covariante* es aquel que se transforma de un sistema de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^N) a otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ mediante la transformación:

$$\bar{A}_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} A_\alpha. \quad (227)$$

Un tensor *mixto* es aquel que se transforma de un sistema de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^N) a otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ mediante la transformación:

$$\bar{A}_\beta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} A_\nu^\mu. \quad (228)$$

Con la finalidad de que las funciones y ecuaciones *preserven las invarianzas*, hecho que resulta fundamental en relatividad, deben escribirse de manera covariante.

La *contracción* es una de las operaciones básicas con tensores: si en un tensor mixto se igualan un índice contravariante y uno covariante. Al sumarse respecto de dicho índice, como lo indica la convención de suma, el resultado es un nuevo tensor dos unidades inferior al original. Por ejemplo: $A_\mu^{\alpha\beta}$, si se hace $\beta = \mu$, se tendrá otro vector B^α .

El *tensor métrico* es aquel que permite transformar el elemento de línea (longitud de arco) $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, es decir, permite medir distancias en el espacio-tiempo curvo. Conociendo la métrica en un espacio, se le conoce en cualquier otro por la relación:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta}; \quad (229)$$

también tiene las propiedades siguientes:

$$g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu \quad (230)$$

y

$$g^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu \quad (231)$$

El espacio-tiempo de Minkowski es una variedad lorentziana de curvatura nula. La métrica de Minkowski en cartesianas, con la signatura $(+ + + -)$ es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (232)$$

Se denomina *símbolo de Christoffel* (que no es un tensor) a la expresión:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right). \quad (233)$$

La *derivada covariante* de un tensor A_α respecto de x^β se define como:

$$A_{\alpha;\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A_\mu. \quad (234)$$

La *derivada covariante* de un tensor A^α respecto de x^β se define como:

$$A^\alpha_{;\beta} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha A^\mu. \quad (235)$$

La *divergencia* de un tensor A^α respecto de x^α se define como:

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha A^\mu. \quad (236)$$

El *proyector espacial* se define como

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{U^\mu U^\nu}{c^2}, \quad (237)$$

proyecta un cuadri-vector arbitrario en otro cuadri-vector perpendicular a U^μ , además en el sistema comóvil $h_{44} = 0$, pues tiene la forma:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (238)$$

D. La función de distribución de Jüttner y la de Maxwell-Boltzmann

En esta sección se verifica que en el límite $z \ll 1$ la función de distribución de Jüttner se transforma en la función de distribución de Maxwell-Boltzmann. Se empieza al tomar el primer término de la expansión en serie de Taylor de la función de Bessel de orden 2 [63], presente en la función de Jüttner:

$$f_{RE} \sim \frac{nm c^2}{4\pi c^3 k_B T} e^{-\frac{1}{z}} \left(\frac{\pi}{2} z\right)^{1/2} e^{-\frac{m c^2}{k_B T} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)}, \quad (239)$$

se efectúan simplificaciones sucesivas:

$$f_{RE} \sim \frac{nm}{4\pi c k_B T} \frac{e^{\frac{1}{z}} e^{-\frac{1}{z}}}{\left(\frac{\pi}{2} z\right)^{1/2}} e^{-\frac{m v^2}{2k_B T}}, \quad (240)$$

$$f_{RE} \sim \frac{nm}{4\pi c k_B T} \frac{e^{-\frac{m v^2}{2k_B T}}}{\pi k_B T 2m c^2}, \quad (241)$$

y se obtiene finalmente:

$$f_{RE} \sim \frac{nm}{2\pi c k_B T} e^{-\frac{m v^2}{2k_B T}} = f_{NR}, \quad (242)$$

que es la función de distribución de Maxwell-Boltzmann.

E. Derivadas parciales de las funciones de distribución de Maxwell-Boltzmann y de Jüttner

En este apéndice se muestran las derivadas parciales de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann

$$\frac{df^{(0)}}{dt} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (243)$$

$$\frac{df^{(0)}}{dt} = f^{(0)} \left[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{T} \left(-\frac{3}{2} + \frac{m \zeta^2}{2k_B T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{m \zeta}{k_B T} \right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \quad (244)$$

y las de la función de distribución de Jüttner

$$f_{,\alpha}^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} n_{,\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T_{,\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathcal{U}^\mu} \mathcal{U}_{,\alpha}^\mu$$

$$f_{,\alpha}^{(0)} = f^{(0)} \left\{ \frac{n_{,\alpha}}{n} - \left[1 - \frac{\gamma}{z} + \frac{1}{2z} \left(\frac{\mathcal{K}_1\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right)} + \mathcal{G}\left(\frac{1}{z}\right) \right) \right] \frac{T_{,\alpha}}{T} + \frac{v_\mu}{zc^2} \mathcal{U}_{,\alpha}^\mu \right\}$$

F. Las ecuaciones de Euler relativistas

Las ecuaciones de Euler relativistas son las siguientes:

- ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathcal{U}^\ell n_{,\ell} = -n \mathcal{U}_{;\mu}^\mu, \quad (245)$$

- ecuación de balance de ímpetu

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}^\ell}{\partial t} \right) + \mathcal{U}^\ell \mathcal{U}_{;\ell}^\mu = -h^{\ell\nu} \frac{nm c^2 z}{\tilde{\rho}} \left(\frac{T_{,\nu}}{T} + \frac{n_{,\nu}}{n} \right) + c \mathcal{U}^\nu \Gamma_{\nu 4}^\ell, \quad (246)$$

- ecuación de balance de energía (usando la temperatura como variable de estado)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{U}^\ell T_{,\ell} = -\frac{k_B T}{z C_n} \mathcal{U}_{;\alpha}^\alpha, \quad (247)$$

En el sistema comóvil las ecuaciones anteriores se modifican de la siguiente manera:

- ecuación de continuidad

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{cm} = 0, \quad (248)$$

- ecuación de balance de ímpetu

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}^\ell}{\partial t} \right)_{cm} = \frac{nm c^2 z}{\rho} \left[h^{\ell\nu} c^2 z \left(\frac{T_{,\nu}}{T} + \frac{n_{,\nu}}{n} \right) - c^2 \Gamma_{44}^\ell \right], \quad (249)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{cm} = 0, \quad (250)$$

además, se tiene que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}^4}{\partial t} \right)_{cm} = 0, \quad (251)$$

G. Analogía con el caso electromagnético

En el electromagnetismo, se presenta una situación similar a la desarrollada en el caso de fluctuaciones de fluidos relativistas. No se cuestiona el hecho de que las ondas electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz. El cálculo que sigue son notas del curso de termodinámica irreversible del Dr. Sandoval-Villalbazo, y muestra los supuestos que contiene este importante resultado.

El punto de partida lo constituye las ecuaciones de Maxwell, que contienen la dinámica de todos los fenómenos electromagnéticos clásicos [64]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (252)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad (253)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (254)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (255)$$

Se toma el rotacional de la expresión (252), y se usa la ecuación (253) para obtener la siguiente expresión:

$$-\nabla^2 E = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (256)$$

O, con la forma general:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (257)$$

donde se obtiene una ecuación de ondas, mostrando que los fenómenos eléctricos viajan como una onda a la velocidad de la luz (c). Una expresión análoga se obtiene en el caso del campo magnético. Ahora bien, *si las derivadas temporales se desprecian*, se obtendrá una ecuación parabólica, en lugar de una hiperbólica, lo que implica que los campos electromagnéticos se propagarían de manera instantánea (ecuación de Laplace).

H. Demostración de $\nabla^2 R_0 = 0$

En este apéndice se demuestra que el laplaciano de la función $R_0(\vec{r})$ que aparece en las ecuaciones (72) y (77) es cero, lo que implica que las fluctuaciones en densidad (δn) y en temperatura (δT) satisfacen una ecuación de ondas. Se empieza con la ecuación (77) re-escrita a continuación:

$$\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial t^2} - \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] \nabla^2(\delta T) = \frac{k_B^2 T_0^2}{\tilde{\rho}_0 c_v} \nabla^2(R_0),$$

y se sustituye δT tomándolo de la ecuación (68):

$$\frac{\partial^2 \left[\frac{k_B T_0}{c_v n_0} (\delta n - R_0) \right]}{\partial t^2} - \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] \nabla^2 \left[\frac{k_B T_0}{c_v n_0} (\delta n - R_0) \right] = \frac{k_B^2 T_0^2}{\tilde{\rho}_0 c_v} \nabla^2(R_0), \quad (258)$$

de donde:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_B T_0}{c_v n_0} \right) \frac{\partial^2 (\delta n)}{\partial t^2} - \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] \left(\frac{k_B T_0}{c_v n_0} \right) \nabla^2 (\delta n) \\ & - \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] \left(\frac{k_B T_0}{c_v n_0} \right) \nabla^2 R_0 = \frac{k_B^2 T_0^2}{\tilde{\rho}_0 c_v} \nabla^2(R_0), \end{aligned} \quad (259)$$

y luego de un reacomodo de términos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (\delta n)}{\partial t^2} - \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] \nabla^2 (\delta n) \\ & - \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] \nabla^2 R_0 = \frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \nabla^2(R_0), \end{aligned} \quad (260)$$

Los dos primeros términos de la ecuación (260) corresponden al miembro izquierdo de la ecuación (72), por lo que se obtiene:

$$-\frac{n_0 k_B^2 T_0}{\tilde{\rho}_0 c_v} \nabla^2(R_0) = \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] \nabla^2 R_0 + \frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \nabla^2(R_0), \quad (261)$$

se trasladan todos los términos del lado izquierdo de la ecuación:

$$\left\{ -\frac{n_0 k_B^2 T_0}{\tilde{\rho}_0 c_v} - \left[\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{k_B}{c_v} - 1 \right) \right] - \frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0} \right\} \nabla^2(R_0) = 0, \quad (262)$$

que luego de un rearrreglo de términos:

$$\left(\frac{k_B T_0 n_0}{\tilde{\rho}_0}\right) \left(\frac{k_B}{c_v} - \frac{k_B}{c_v} + 1 - 1\right) \nabla^2 (R_0) = 0, \quad (263)$$

de donde se obtiene finalmente que:

$$\nabla^2 (R_0) = 0, \quad (264)$$

que es el objetivo de esta demostración.

I. Cálculo de la relación de dispersión correspondiente al espectro de Rayleigh-Brillouin en presencia de la ecuación constitutiva modificada para el flujo de calor

Para establecer la relación de dispersión del espectro, se parte del sistema de ecuaciones linealizado que describe la dinámica de un fluido simple relativista con la ecuación de continuidad, la de balance de ímpetu y la de conservación de la energía, se incluye la ecuación constitutiva linealizada para el flujo de calor. Luego se obtienen, sucesivamente, las transformadas de Fourier y de Laplace (es irrelevante el orden en que se efectúen). Posteriormente se escribe la ecuación matricial del sistema transformado, que será de la forma $MH = ND_0$, donde M es una matriz de 4×4 cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas, H es una de 4×1 , formado con las incógnitas, N es una matriz de 4×4 que contiene los coeficientes de las transformadas de Fourier-Laplace de los valores iniciales de las incógnitas y D_0 es también de 4×1 y contiene los valores iniciales de las incógnitas. Se calcula el determinante de la matriz M y se iguala a cero, a esta ecuación se le denomina *relación de dispersión*. Se forma una matriz cuyas cuatro primeras filas son los coeficientes de las transformadas de las incógnitas (δn , δT , $\delta \theta$ y $\delta J_{[Q];\nu}^\nu$). El ejemplo que a continuación se desarrolla es el de la ecuación constitutiva para el flujo de calor de Eckart modificado.

Al efectuar la transformada de Laplace se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$s\delta\tilde{n}(r, s) + n_0\delta\tilde{\theta} = \delta n(r, 0), \quad (265)$$

$$\tilde{\rho}_0 s\delta\tilde{\theta}(r, s) + n_0 k_B \nabla^2 \left(\delta\tilde{T}(r, s)\right) + k_B T_0 \nabla^2 (\delta\tilde{n}(r, s)) + \frac{s}{c^2} \nabla \cdot \delta\tilde{J}_{[Q]}^\nu = \tilde{\rho}_0 \delta\theta(r, 0) + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot J_{[Q]}^\nu(r, 0), \quad (266)$$

$$n_0 C_n s \delta \tilde{T}(r, s) + n_0 k_B T_0 \delta \tilde{\theta}(r, s) + \nabla \cdot \delta \tilde{J}_{[Q]}^\nu(r, s) = n_0 C_n \delta T(r, 0), \quad (267)$$

$$\nabla \cdot \delta \tilde{J}_{[Q]}^\nu(r, s) = -\frac{L_{tt}}{T} \nabla^2 \left(\delta \tilde{T}(r, s) \right) - \frac{L_{nt}}{n} \nabla^2 \left(\delta \tilde{n}(r, s) \right), \quad (268)$$

donde s el parámetro de la transformada de Laplace, r el vector posición y el símbolo $\tilde{}$ indica la variable transformada. Al efectuar la transformada de Fourier sobre las transformadas de Laplace se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$s \delta \hat{\tilde{n}}(r, s) + n_0 \delta \hat{\tilde{\theta}} = \delta \hat{n}(q, 0), \quad (269)$$

$$\tilde{\rho}_0 s \delta \hat{\tilde{\theta}}(r, s) + n_0 k_B \nabla^2 \left(\delta \hat{\tilde{T}}(r, s) \right) + k_B T_0 \nabla^2 \left(\delta \hat{\tilde{n}}(r, s) \right) + \frac{s}{c^2} \nabla \cdot \delta \hat{\tilde{J}}_{[Q]}^\nu = \tilde{\rho}_0 \delta \hat{\theta}(q, 0) + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot \hat{J}_{[Q]}^\nu(q, 0), \quad (270)$$

$$n_0 C_n s \delta \hat{\tilde{T}}(r, s) + n_0 k_B T_0 \delta \hat{\tilde{\theta}}(r, s) + \nabla \cdot \delta \hat{\tilde{J}}_{[Q]}^\nu(r, s) = n_0 C_n \delta \hat{T}(q, 0), \quad (271)$$

$$\nabla \cdot \delta \hat{\tilde{J}}_{[Q]}^\nu(r, s) = -\frac{L_{tt}}{T} \nabla^2 \left(\delta \hat{\tilde{T}}(r, s) \right) - \frac{L_{nt}}{n} \nabla^2 \left(\delta \hat{\tilde{n}}(q, s) \right), \quad (272)$$

donde q es el parámetro de la transformada de Fourier y el símbolo $\hat{}$ indica la variable transformada. Finalmente se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} s & n_0 & 0 & 0 \\ -k_B T_0 q^2 & n_0 m s & -n_0 k q^2 & \frac{s}{c^2} \\ 0 & n_0 k_B T_0 & C_n n_0 s & 1 \\ -q^2 \frac{L_{nt}}{n} & 0 & -q^2 \frac{L_{tt}}{T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \hat{\tilde{n}}(q, s) \\ \delta \hat{\tilde{\theta}}(q, s) \\ \delta \hat{\tilde{T}}(q, s) \\ \delta \hat{\tilde{J}}_{[Q];\nu}^\nu(q, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\rho}_0 & 0 & \frac{1}{c^2} \\ 0 & 0 & n_0 C_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \hat{n}(q, 0) \\ \delta \hat{\theta}(q, 0) \\ \delta \hat{T}(q, 0) \\ \delta \hat{J}_{[Q];\nu}^\nu(q, 0) \end{pmatrix}, \quad (273)$$

donde $\hat{\tilde{n}}$, $\hat{\tilde{\theta}}$, $\hat{\tilde{T}}$ y $\hat{\tilde{J}}_{[Q];\nu}^\nu$ son las transformadas de las incógnitas del sistema matricial. Se calcula el determinante de dicha matriz y se iguala a cero, esa es justamente la relación de dispersión.

$$d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0$$

los coeficientes d_3, d_2, d_1 y d_0 se encuentran en las referencias [10, 50].

J. Gravedad linealizada

La gravedad linealizada es un esquema de aproximación usado en relatividad general en el cual las contribuciones no lineales del tensor de Riemann (o tensor de curvatura) son ignoradas. Este tensor es función de los símbolos de Christoffel: $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}$. El objetivo es reproducir el campo gravitatorio supuesto por Newton de manera de que se cumpla la ecuación:

$$m_i \dot{v}^{\ell} = m_g g^{\ell}, \quad (274)$$

con m_i la masa inercial y m_g la gravitacional. Dado que ambas masas son iguales se tiene que

$$\dot{v}^{\ell} - g^{\ell} = 0. \quad (275)$$

En un espacio de Minkowsky la ecuación de movimiento en un campo gravitacional puede escribirse como

$$\dot{v}^{\alpha} = v_{\mu} F^{\alpha\mu}, \quad (276)$$

entonces la ecuación puede reescribirse de la siguiente manera

$$\dot{v}^{\alpha} - v_{\mu} F^{\alpha\mu} = 0, \quad (277)$$

que corresponde a la ecuación de la geodésica ($\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$). Si se expresa la velocidad v_{α} como

$$v_{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma_{(\omega)} \omega_1 \\ \gamma_{(\omega)} \omega_2 \\ \gamma_{(\omega)} \omega_3 \\ -\gamma_{(\omega)} c \end{pmatrix} \quad (278)$$

y el tensor de campo gravitacional, $F^{\mu\alpha}$, como

$$F^{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_1/c \\ 0 & 0 & 0 & g_2/c \\ 0 & 0 & 0 & g_3/c \\ -g_1/c & -g_2/c & -g_3/c & 0 \end{pmatrix}. \quad (279)$$

Al calcular la aceleración como $v_\mu F^{\alpha\mu}$, esto es

$$\dot{v}^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\omega)\omega_1 \\ \gamma(\omega)\omega_2 \\ \gamma(\omega)\omega_3 \\ -\gamma(\omega)c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_1/c \\ 0 & 0 & 0 & g_2/c \\ 0 & 0 & 0 & g_3/c \\ -g_1/c & -g_2/c & -g_3/c & 0 \end{pmatrix}, \quad (280)$$

resulta

$$\dot{v}^\mu = \begin{pmatrix} -\gamma(\omega)g_1 \\ -\gamma(\omega)g_2 \\ -\gamma(\omega)g_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (281)$$

Para las componentes espaciales, la ecuación (277) puede reescribirse como:

$$v_\mu F^{\ell\mu} = v_4 F^{\ell 4} = -\gamma(\omega)g^\ell. \quad (282)$$

Resulta interesante hacer notar que en el caso electromagnético

$$m \frac{dv^\ell}{dt} = q v_\mu F_{EM}^{\ell\mu}. \quad (283)$$

En esta expresión, no existe una cancelación equivalente a la de las masas en el caso gravitacional. Esto hace imposible identificar directamente la ecuación (283) con una geodésica en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Una solución posible a este problema fue propuesta por T. Kaluza en 1921, recurriendo a cinco dimensiones [65].

La métrica asociada a la gravedad newtoniana es la siguiente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1 + \frac{\Phi}{c^2}) \end{bmatrix}, \quad (284)$$

la inversa de dicha matriz resulta:

$$g_{\mu\nu}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{-1+\frac{\Phi}{c}}\right) \end{bmatrix}. \quad (285)$$

Se calcula la inversa debido a la propiedad que establece que $g_{mn}g^{nl} = \delta_m^l$. Por lo tanto, al realizar un desarrollo en serie del elemento g_{44}^{-1} , la métrica asociada a la gravedad newtoniana escrita de manera contravariante es la ecuación (200) reescrita a continuación:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \end{bmatrix}. \quad (286)$$

Se pueden calcular los símbolos de Christoffel usando la definición (233) y resulta que los únicos no nulos son los siguientes:

$$\Gamma_{44}^1 = \Gamma_{44}^2 = \Gamma_{44}^3 = -\frac{\Phi}{2c^2}. \quad (287)$$

Lo anterior permite calcular el término $v^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{zC}$:

$$v^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{zC} = v^1 \Gamma_{14}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{zC} + v^2 \Gamma_{24}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{zC} + v^3 \Gamma_{34}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{zC} + v^4 \Gamma_{44}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{zC}, \quad (288)$$

$$v^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{zC} = \frac{v^1}{zC} (\Gamma_{14}^1 \mathcal{U}_1 + \Gamma_{14}^2 \mathcal{U}_2 + \Gamma_{14}^3 \mathcal{U}_3 + \Gamma_{14}^4 \mathcal{U}_4) + \quad (289)$$

$$\frac{v^2}{zC} (\Gamma_{14}^1 \mathcal{U}_1 + \Gamma_{14}^2 \mathcal{U}_2 + \Gamma_{14}^3 \mathcal{U}_3 + \Gamma_{14}^4 \mathcal{U}_4) +$$

$$\frac{v^3}{zC} (\Gamma_{14}^1 \mathcal{U}_1 + \Gamma_{14}^2 \mathcal{U}_2 + \Gamma_{14}^3 \mathcal{U}_3 + \Gamma_{14}^4 \mathcal{U}_4) +$$

$$\frac{v^4}{zC} (\Gamma_{14}^1 \mathcal{U}_1 + \Gamma_{14}^2 \mathcal{U}_2 + \Gamma_{14}^3 \mathcal{U}_3 + \Gamma_{14}^4 \mathcal{U}_4).$$

En el sistema comóvil $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3 = 0$, $\mathcal{U}_4 = c$ y $v^\alpha = \gamma_{(k)} k^\ell$, por lo que

$$v^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^\mu \frac{\mathcal{U}_\mu}{z c} = \frac{\gamma(k)}{z} k^\ell \Gamma_{\ell 4}^4. \quad (290)$$

K. Resolución de la integral (142)

En el capítulo V se muestra el resultado del cálculo de la integral:

$$J_{[Q_g]}^\ell = -\frac{\tau m}{3z} g^\ell \frac{c^2 n}{\mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma(k) - 1)^{3/2} \gamma(k) \left(\frac{\gamma(k)}{\mathcal{G}(1/z)} - 1 \right) d\gamma,$$

cuyo desarrollo se describe a continuación.

Se divide la integral en la suma de dos integrales:

$$J_{[Q_g]}^\ell = -\frac{\tau m}{3z} g^\ell \frac{c^2 n}{\mathcal{G}(1/z) \mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma(k) - 1)^{3/2} \gamma(k)^2 d\gamma + \frac{\tau m}{3z} g^\ell \frac{c^2 n}{\mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma(k) - 1)^{3/2} \gamma(k) d\gamma, \quad (291)$$

se usa el hecho de que $\mathcal{G}(1/z) = \mathcal{K}_3(1/z)/\mathcal{K}_2(1/z)$:

$$J_{[Q_g]}^\ell = \frac{\tau m c^2 n}{3z} g^\ell \left[\frac{1}{\mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma(k) - 1)^{3/2} \gamma(k) d\gamma - \frac{1}{\mathcal{K}_3(\frac{1}{z})} \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma(k) - 1)^{3/2} \gamma(k)^2 d\gamma \right]. \quad (292)$$

La función de Bessel modificada de orden ν se escribe como [63]:

$$\mathcal{K}_\nu \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{1}{2z} \right)^\nu \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma(k)^2 - 1)^{\nu-1/2} d\gamma, \quad (293)$$

para $\nu = 2$ se tiene:

$$\mathcal{K}_2 \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{(\frac{3}{2})!} \left(\frac{1}{2z} \right)^2 \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma(k)^2 - 1)^{3/2} d\gamma, \quad (294)$$

y para $\nu = 3$

$$\mathcal{K}_3 \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{(\frac{5}{2})!} \left(\frac{1}{2z} \right)^2 \int_1^\infty e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} (\gamma(k)^2 - 1)^{5/2} d\gamma. \quad (295)$$

Se identifican las funciones modificadas de Bessel de orden 2 y 3 y se obtiene que:

$$J_{[Q_g]}^\ell = \frac{\tau m c^2 n}{3z} g^\ell \left\{ \frac{1}{\mathcal{K}_2(\frac{1}{z})} \left[3z^2 \mathcal{K}_3 \left(\frac{1}{z} \right) \right] - \frac{1}{\mathcal{K}_3(\frac{1}{z})} \left[3z^2 \mathcal{K}_2 \left(\frac{1}{z} \right) + 5z \mathcal{K}_3 \left(\frac{1}{z} \right) \right] \right\}. \quad (296)$$

Se usa el hecho de que $z = \frac{k_B T}{mc^2}$ y resulta que la contribución gravitacional al flujo de calor es:

$$J_{[Q_g]}^\ell = g^\ell \frac{\tau n k_B T}{z} \left(5z + \frac{1}{\mathcal{G}(1/z)} - \mathcal{G}(1/z) \right). \quad (297)$$

L. Acerca de la parabolicidad de la ecuación de calor

En el capítulo IV se muestra que las ecuaciones (58, 59 y 60) conforman un conjunto de ecuaciones linealizadas de la cual se deduce que las fluctuaciones satisfacen una ecuación de ondas. Se empieza por tomar las mismas tres ecuaciones e incluir el término de conducción de calor, con lo que se tiene:

$$\frac{\partial(n\varepsilon)}{\partial t} + p\theta - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{[Q]} = 0, \quad (298)$$

luego se calcula la derivada temporal del término de la energía $\varepsilon(n, T)$ y se obtiene:

$$\frac{\partial(n\varepsilon)}{\partial t} = n \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n} \right)_T \frac{\partial n}{\partial t} + n \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (299)$$

después se sustituye la ecuación (298) en (299), y resulta:

$$n \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n} \right)_T \frac{\partial n}{\partial t} + n \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_n \frac{\partial T}{\partial t} + p\theta - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{[Q]} = 0. \quad (300)$$

Si $\theta = 0$ se tiene que la densidad de partículas es constante:

$$\frac{\partial(n)}{\partial t} = 0, \quad (301)$$

y la ecuación (300) se convierte en:

$$n \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_n \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{[Q]} = 0. \quad (302)$$

Dado que el flujo de calor $\vec{J}_{[Q]}$ es proporcional a $\vec{\nabla} T$, para el caso linealizado:

$$n \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_n \frac{\partial(\delta T)}{\partial t} - k \nabla^2(\delta T) = 0, \quad (303)$$

que es una ecuación parabólica. Como se estableció anteriormente, la parabolicidad se presenta cuando $\delta\theta$ es despreciado en la ecuación (300).

M. Ecuación de Boltzman en relatividad general

La ecuación de Boltzmann se puede escribir de manera genérica como:

$$\frac{df}{dt} = J(ff'). \quad (304)$$

En relatividad especial se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \dot{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = J(ff'), \quad (305)$$

el término de la aceleración se expresa en términos de la fuerza:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = J(ff'). \quad (306)$$

En cambio, en relatividad general, la ecuación de Boltzmann es:

$$v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \dot{v}^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = J(ff'), \quad (307)$$

y debido a que las moléculas se mueven en geodésicas; $\dot{v}^\mu = 0$.

La ecuación de transporte de Enskog adquiere la forma:

$$\left(\int v^\mu \varphi f d *v \right)_{;\mu} = 0, \quad (308)$$

en la cual el efecto de fuerza externa corresponde a la derivada covariante incluida en esta última ecuación.

Referencias

- [1] García-Colín L. S.; *Teoría cinética de los gases*; Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, Colección CBI, México (1990).
- [2] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P. y Krook, M.; *A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems*; Phys. Rev. vol. 94, number 3 (1954).
- [3] Eckart, C.; *The Thermodynamics of Irreversible Processes I: The Simple Fluid*; Phys. Rev. **58**, 267-269 (1940); *The Thermodynamics of Irreversible Processes III: Relativistic Theory of the Simple Fluid*; Phys. Rev. **58**, 919-929 (1940).
- [4] Landau, L. y Lifshitz, E.M.; *Fluid Mechanics*; Addison Wesley, Reading Mass. (1958).
- [5] Hiscock, W. A. y Lindblom, L., *Generic instabilities in first order dissipative relativistic fluid theories*; Phys. Rev. D **31**, 725-733 (1985).
- [6] Sandoval-Villalbazo A., García-Perciante, A. L. & García-Colín L. S.; *Relativistic transport theory for simple fluids at first order in the gradients*; Physica (Amsterdam) **388A**, 3765 (2009).
- [7] Ver por ejemplo Kolb, P. F. y Heinz, U.; *Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions*; Quark Gluon Plasma 3, Hwa, R. C. y Wang, X. -N. Editores, World Scientific, Singapore pp 634-714 (2004).
- [8] Victor Roy, Chaudhuri, A. K. y Bedangadas Mohanty; *Comparison of results from a 2+1D relativistic viscous hydrodynamic model to elliptic and hexadecapole flow of charged hadrons measured in Au-Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*; Phys Rev C **86**, 014902 (2012).
- [9] Weinberg, S.; *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*; John Wiley & Sons, N. Y. (1972).
- [10] Brun-Battistini, D., Sandoval-Villalbazo, A. y Mondragón-Suárez, J. H.; *El flujo de calor en la Hidrodinámica relativista para gases diluidos: estabilidad y causalidad*, García-Colín, L. S. y del Río Correa, J. L., (Coord.), *Cincuenta años de Física Estadística en México*, México: Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,, Colegio Nacional (2011).
- [11] Brun-Battistini, D. y Sandoval-Villalbazo, A.; *Light Cone analysis of relativistic first-order in*

- the gradients hydrodynamics*; AIP Conf. Proc. 1312 57 AIP Conference Proceedings, **1312**, 57-63 (2010).
- [12] Sandoval-Villalbaz, A., Garcia-Perciante, A. L. y Brun-Battistini D.; *Tolman's law in linear irreversible thermodynamics: a kinetic theory approach*; Phys. Rev. D **86**, 084015 (2012).
- [13] Brun-Battistini D., Sandoval-Villalbaz, A. & Garcia-Perciante, A. L.; *Entropy production in simple relativistic fluids and its relation with Tolman's law in Newtonian gravity*; AIP Conf. Proc. 1578, 122 <http://dx.doi.org/10.1063/1.4862457> (2014).
- [14] Brun-Battistini D., Sandoval-Villalbaz, A. & Garcia-Perciante, A. L.; *Entropy Production in Simple Special Relativistic Fluids*; Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics (2014).
- [15] García-Colín, L. S.; *Termodinámica de Procesos Irreversibles*; Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, México (1990).
- [16] García-Colín, L. S.; *Introducción a la termodinámica clásica*; Editorial Trillas, México, 3era. ed. (1986).
- [17] Reif, F.; *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*; McGraw Hill, New York (1965).
- [18] García-Colín L. S. y Goldstein-Menache, P.; *La física de los procesos irreversibles*; El Colegio Nacional, tomo 1, México (2003).
- [19] Clausius, R.; *Über die zur Erklärung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärme-theorie dienenden mechanischen Gleichungen*; Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Informe de las reuniones de la Real Academia Prusiana de Ciencias de Berlín), pp 663-670 (1884).
- [20] Bird, R. B. , Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N.; *Fenómenos de transporte*, John Wiley & Sons, 2 ed. (2007).
- [21] López-Lemus, J.; *Condiciones de frontera para un gas enrarecido*, tesis para la obtención del grado de Doctor en Ciencias por la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa (2000).
- [22] Israel, W. & Stewart, J. M.; *Transient Relativistic Thermodynamics and Kinetic Theory*; Ann. Phys. NY **118**, 341-372 (1979).
- [23] de Groot, S. R., van Leeuwen, W. A. y van der Wert, Ch.; *Relativistic Kinetic Theory*; North Holland Publ. Co., Amsterdam (1980).
- [24] Muschik W., v. Borzeszkowski H.-H.; *Entropy identity and equilibrium conditions in relativistic thermodynamics*; Gen. Rel. Grav. **41**, 1285-1304 (2009).

- [25] I-Shi Liu, Möller, I. y Ruggeri, E.; *Relativistic Thermodynamic of Gases*; Ann. Phys. **169**, 191-219 (1986).
- [26] Lavenda, B.; *Nonequilibrium statistical thermodynamics*; Wiley, New York (1985).
- [27] Jou, D., Casas-Vazquez, J. y Lebon G.; *Extended Irreversible Thermodynamics*; Springer 4 ed, New York (2010).
- [28] Jou, D. , Pavon, D. y Casas-Vazquez; *On a covariant formulation of dissipative phenomena*; Ann. Inst. Henri Poincare **A36**, 79 (1982).
- [29] Andersson, N. y Lopez-Monsalvo, C.; *A consistent first-order model for relativistic heat flow*; Class. Quantum Grav. **28**, 19, 195023-195037 (2011).
- [30] Sandoval-Villalbazo, A., Garcia-Perciante, A. L., Mondragón-Suárez, J. H. y Brun-Battistini, D.; *Limitaciones de la Termodinámica Extendida en la descripción de correcciones relativistas en la formación de estructuras astrofísicas*; Sesión plenaria LVI Congreso Nacional de Física, San Luis Potosí, octubre (2013).
- [31] Israel, W. & Stewart, J.M.; *Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory*; Ann. of Physics, **118**, 341-372, (1979).
- [32] Grad, H.; *On the kinetic theory of rarefied gases*; Comm. Pure Appl. Math., 2: 331–407. doi: 10.1002/cpa.3160020403 (1949).
- [33] Velasco, R. M., Uribe, F. J. y García-Colín, L. S.; *Inconsistencies in moment methods*; Phys Rev E 66, pp 32103 (2002).
- [34] C. Cercignani and G. M. Kremer; *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications*; Birkhäuser, Basel (2002).
- [35] García-Perciante, A. L. y Méndez, A. R.; *Heat conduction in relativistic neutral gases revisited*; Gen. Rel. Grav. **43**,2257-2275 (2011).
- [36] Garcia-Perciante, A. L., Sandoval-Villalbazo, A. y García-Colín, L. S.; *On the microscopic nature of dissipative effects in special relativistic kinetic theory*; Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, Volume 37, Issue 1, Pages 43-61 (2012).
- [37] Chapman, S. y Cowling, T. G.; *The mathematical theory of non-uniform gases*; Cambridge Mathematical Library, 3 ed UK (1971).
- [38] Chacón-Acosta, G.; *Cien años de la función de distribución de Jüttner para el gas relativista*; Revista Mexicana de Física **58** 117–126 (2012).
- [39] Sandoval-Villalbazo A., García-Colín L. S.; *The relativistic kinetic formalism revisited*; Physica

- A **278**, 428-439 (2000).
- [40] Garcia-Perciante A. L., Garcia-Colin L. S. & Sandoval-Villalbazo A.; *On the nature of the so-called generic instabilities in dissipative relativistic hydrodynamics*; Gen. Rel. Grav. **41**, 1645-1654 (2009).
- [41] García-Perciante, A. L. y Sandoval-Villalbazo A.; *Remarks on relativistic kinetic theory to first order in the gradients*; Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics **165**, 1024-1028 (2010).
- [42] Welander, P.; *On the temperature jump in a rarefied gas*; Arkiv Fysic 7, 507-553, (1954).
- [43] de Groot, S. R. y Mazur, P.; *Non-equilibrium thermodynamics*; Dover Publications Inc., New York (1984).
- [44] Denicol, G. S., Koide, T. & Mota, Ph; *Stability and causality in relativistic dissipative hydrodynamics*; Journal of Physics G: Nuclear and particle physics vol. 35 num 11 (2008).
- [45] Kolb, E. y Turner, M.; *The early universe*; Frontiers in Physics (**69**) Westview Press (1994).
- [46] Berne, B. J. y Pecora, R.; *Dynamic light scattering with applications to chemistry, biology and physics*; Dover Publ. NY (2000).
- [47] Boon, J. P. y Yip, S.; *Molecular Hydrodynamics*; Verlag, Ort, Jahr: McGraw-Hill Company, New York (1991).
- [48] Ortiz de Zárate, J. M. y Sengers, J. V.; *Hydrodynamic fluctuations in fluid and fluid mixtures*; Elsevier Publ. Amsterdam (2006).
- [49] Landau, L. y Placzek, G.; Phys. Z. Sowjetunion 5, 172 (1934).
- [50] Garcia-Perciante, A. L., Garcia-Colin L. S. y Sandoval-Villalbazo A.; *The Rayleigh-Brillouin Spectrum in Special Relativistic Hydrodynamics*; Phys. Rev. E **79**, 066310-066315 (2009).
- [51] Sandoval-Villalbazo, A. and García-Colín, L. S.; *Light Scattering Test Regarding the Relativistic Nature of Heat*; Proc. XXVIII Spanish Rel. Meeting, Eds. L. Mornas and J. Diaz Alonso, AIP Conference Proceedings **841**, 603, arXiv: gr-qc/0511055 (2006).
- [52] Van Kampen, N. G.; *A model for relativistic heat transport*; Physica, **46**, 2, 315- 332 (1970).
- [53] Mountain, R.; *Spectral Distribution of Scattered Light in a Simple Fluid*; Rev. Mod. Phys. **38**, 205-214 (1966).
- [54] Tolman, R. C.; *On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity*; Phys. Rev. **35**, 904-924 (1930); *Temperature equilibrium in a static gravitational field*, Phys. Rev. **36**, 1791-1798 (1930).
- [55] García-Perciante, A. L., Sandoval-Villalbazo A., & García-Colín L. S.; *Benedicks effect in a*

- relativistic simple fluid*; Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics **38**, 141 (2013).
- [56] Liboff, Richard L.; *Kinetic Theory: Classical, Quantum and Relativistic Descriptions*; 3rd ed., Springer. (2003).
- [57] Courant, R. y Hilbert, D.; *Methods of mathematical physics*; John Wiley and Sons, vol. 1, New York (1989).
- [58] Moratto, V., García-Perciante, A. L. y García-Colín L. S.; *Entropy production in relativistic binary mixtures*; Phys. Rev. E **84**, 021132 (2011)
- [59] Rephaeli, Y.; *Cosmic microwave background Comptonization by hot intracluster gas*; Astrophysical Journal vol. 445, no. 1, p. 33-36 (1995).
- [60] Folger, T.; *Einstein's Grand Quest for a Unified Theory*; Discover, September (2004).
- [61] Mondragón-Suárez, J. H., Sandoval-Villalbaz, A. y García-Perciante, A. L.; *Structure formation in the presence of relativistic heat conduction: corrections to the Jeans wave number with a stable first order in the gradients formalism*; General Relativity and Gravitation **45**, pp 1805-1814 (2013).
- [62] Mondragon-Suarez, J. H. y Sandoval-Villalbaz, A.; *Jeans instability analysis in the presence of heat in Eckart's frame*; Gen. Relativ. Gravit. **44**:139-145 (2012).
- [63] Arfken, G.; *Mathematical methods for physicists*; Academic Press, International Edition, New York, 2 ed. (1970).
- [64] Jackson, J. D.; *Classical electrodynamics*; John Wiley & Sons, 3 ed. (1998).
- [65] Kaluza, T.; *Zum Unitätsproblem der Physik*; Sitzungsberichte Preussischen Akademie der Wissenschaften, G9, 966-972 (1921).