Universidad Iberoamericana

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por Decreto Presidencial
del 3 de abril de 1981

"Fundamentación cinética de la teoría de transporte para gases eléctricamente cargados en espacio-tiempos curvos."

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

P r e s e n t a

ALMA ROCÍO SAGACETA MEJÍA

Director: Dr. Alfredo Sandoval Villalbazo
Lectores: Dra. Dominique Anne Celine Brun Battistini
Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez
Dr. José Humberto Mondragón Suárez
Dra. Ana Laura García Perciante

Ciudad de México 2018

"Somewhere,
Something Incredible Is Waiting To Be Known"

Carl Sagan

Agradecimientos

Este trabajo representa la culminación de mis estudios de doctorado, por lo que me gustaría agradecer a todas aquellas personas con quienes compartí todo este proceso:

Agradezco de manera especial al **Dr. Alfredo Sandoval Villalbazo** por guiarme durante todo el trabajo de doctorado; en particular por su confianza, apoyo y orientación durante el tiempo que fue mi director de tesis. Existe una admiración por su trabajo desde mis estudios de la licenciatura, haciendo que culminara preparación académica a través de su guía.

A mis sinodales: Dra. Dominique Anne Celine Brun Battistini, Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez, Dr. José Humberto Mondragón Suárez y a la Dra. Ana Laura García Perciante por su tiempo y sus comentarios para mejorar este trabajo. Sin su apoyo y amistad no me hubiera sido posible concluir de manera satisfactoria el doctorado.

A mi familia por el apoyo desinteresado que me han brindado durante todo mi desarrollo académico y personal. Por estar siempre en mis metas pero sobre todo en mis fracasos.

Agradezco a Máx, Julián, Paloma y Rafael, mis mejores amigos, que sin ustedes y sin su apoyo probablemente la dirección de mi vida sería totalmente distinta. Por escucharme, comprenderme, compartir conmigo sus experiencias de vida.

A todas las personas que conocí en la Ibero, de áreas totalmente diferentes a la ciencia y que siempre me brindaron su apoyo en mi investigación. Ayudaron a que mi panorama en la vida profesional y personal se ampliara.

A las personas que actualmente ya no se encuentran en mi vida, pero que fueron una parte fundamental para mi crecimiento en lo personal y en lo académico.

A mi pareja, Arturo Durán, quien estuvo presente en la culminación de mi doctorado, apoyándome, escuchándome y brindándome todo su amor, cariño y respeto. Agradezco a la vida haber encontrado una persona que me comprendiera y que me motivara a ser mejor cada día. Te quiero.

Agradezco el apoyo de CONACYT por la beca otorgada a lo largo del programa de doctorado con úmero de becario 386875.

Finalmente, agradezco a la Universidad Iberoamericana, Ciudad de México por apoyarme

económicamente a través de la beca de excelencia. Es un orgullo sentirme parte de esta hermosa comunidad.

Índice general

Introducción

Teoría de transporte

En la actualidad, la fundamentación cinética que explica el comportamiento de gases monocomponentes para sistemas eléctricamente cargados presenta problemas conceptuales. Por ejemplo, para obtener teóricamente expresiones clásicas tales como la *Ley de Ohm* para un sistema monocomponente, se hace uso de la hipótesis de estado estacionario, es decir, la suposición de que la función de distribución del gas no varía explícitamente respecto al tiempo. Este enfoque es limitado debido a que se ignoran fenómenos fundamentales reales presentes en los gases, tales como la propagación de energía en forma de ondas.

A raíz del problema de la produción de energía limpia, el estudio de los plasmas resulta de gran utilidad para entender su comportamiento y así hacer factible el uso de estos para la producción de energía no contaminante. Actualmente se han invertido recursos para el estudio y la generación de energía nuclear por medio de la fusión controlada, sin embargo no se han obtenido los resultados deseados. A pesar del avance tecnológico y científico que se ha tenido durante el último siglo, aún no se comprende del todo el comportamiento de los gases ionizados. Se requiere de una gran inversión monetaria para poder realizar dichos experimentos, por lo que es necesario fundamentar teóricamente los posibles resultados.

En este tipo de experimentos se miden cantidades macroscópicas tales como la presión y la temperatura, sin embargo a nivel conceptual existen descripciones fenomenológicas no suficientemente fundamentadas microscópicamente. Es importante mencionar que en experimentos clásicos se ha observado la relación entre los flujos y fuerzas termodinámicas [1, 2, 3], en el caso de los plasmas estas relaciones no se encuentran teóricamente bien fundamentadas en el marco de la relatividad.

En este trabajo se usarán elementos de la teoría de la relatividad general para establecer, por medio de un enfoque novedoso, las ecuaciones de evolución de un gas ionizado en presencia del campo electromagnético [4]. Las fuentes de los campos presentes curvan el espacio-tiempo, determinando las trayectorias inmersas en dicho espacio. Desde esta perspectiva el concepto de fuerza es un efecto de la curvatura del espacio-tiempo.

Como se menciona en el título de la tesis, se aborda el problema usando la teoría cinética relativista [5]. Para un sistema monocomponente cargado se hace uso de la ecuación de Boltzmann relativista junto con la función de distribución de Jüttner, para establecer las ecuaciones de conservación en equilibrio local, a orden cero, y se obtiene la función de distribución a primer orden en los gradientes espaciales. Encontrando así las relaciones entre los flujos y fuerzas para un gas ionizado en presencia del campo electromagnético.

Historia

Gunnar Nordstrom propuso la primera teoría conocida para unificar el electromagnetismo y la teoría gravitatoria de Newton. Nordstrom usó el tensor de energía-momento en un espacio de Minkowski de 5 dimensiones, dicha teoría presenta ciertos problemas debido a que unicamente incluye la gravedad como un campo escalar dejando invariante el campo electromagnético.

Tiempo después del descubrimiento de la teoría de la relatividad general, Theodor Kaluza descubrió que el tensor de cinco dimensiones que curva el espacio-tiempo se puede moledar con una métrica en cuatro dimensiones acoplada al potencial electromagnético y a un campo escalar.

Kaluza envió su idea a Einstein y posteriormente él publicó un trabajo utilizando estas ideas.

Metodología

La estructura de trabajo de tesis es la siguiente:

En el capítulo 1, se muestra la fundamentación cinética teórica para gases ionizados y su incosistencia para la obtención de la ley de Ohm. Para abordar dicho problema se usa la teoría cinética, por lo que se hace un breve resumen de la obtención de las ecuaciones de conservación en el marco de la relatividad general. En la parte final del capítulo se enuncian los elementos teóricos de la teoría de Kaluza que se utilizan como una herramienta útil en el desarrollo del trabajo.

En el capítulo 2, se establece la ecuación de Boltzman en el formalismo pentadimensional para obtener las ecuaciones de conservación en el régimen de Euler. Una vez obtenidas dichas ecuaciones y usando el método de Chapman-Enskog se obtiene la contribución electromegnética para la función de distribución a primer orden en los gradientes.

En el capítulo 3, se usa la función de distribución a primer orden en los gradientes para establecer la relación de los flujos y fuerzas tales como el flujo de partículas y el flujo de calor [6, 7]. En la parte final del capítulo el flujo de calor en el formalismo pentadimensional se utiliza para establecer la producción de entropía.

En el capítulo 4, se aborda la dinámica de una mezcla binaria relativista, donde se obtienen el flujo de partículas y el tensor de ímpetu-energía en dos sistemas de referencia distintos obtenidos fenomenológicamente por Eckart [8] y Landau-Lifschitz [9], respectivamente.

Finalmente, en el capítulo 5 se hace una recapitulación de los resultados presentados y el uso de ellos para un posible trabajo futuro.

Se anexan además los cinco apéndices con el detalle de las operaciones algebraicas útiles para la obtención de los resultados presentados.

Capítulo 1

Elementos de Teoría Cinética

1.1. Ecuación de Boltzmann y conducción de corriente eléctrica

La ecuación de Boltzmann es utilizada en la teoría de transporte para describir el comportamiento estadístico de un sistema fuera del equilibrio. En la teoría cinética esta ecuación, obtenida en 1872 por Ludwig Boltzmann, se usa para comprender la evolución de magnitudes físicas macroscópicas tales como la energía interna, la densidad de ímpetu y el número de partículas por unidad de volumen.

En este trabajo, se establecerán las ecuaciones de conservación para un gas cargado simple diluido en presencia de un campo eléctrico. Por lo que en primera instancia analizaremos la ecuación de evolución para la función de distribución de las moléculas de este fluido en el caso no relativista, dicha ecuación es llamada ecuación de Boltzmann y se encuentra dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = J\left(f, f'\right), \tag{1.1}$$

donde $f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ es la función de distribución de las moléculas, $\vec{r}$ es el vector posición, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ es la velocidad molecular, t es el tiempo, q es la carga de la molécula con masa m, $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ es el potencial eléctrico y $J\left(f, f'\right)$ es denominado el Kernel colisional [5, 10]. El lado izquierdo de la ecuación (1.1) modela el cambio en la función de distribución por el arrastre de partículas, en un volumen $d\vec{r}d\vec{v}$ del espacio fase y esto es igual al Kernel colisional.

Este corresponde a la tasa de cambio de la función de distribución debida a las colisiones o a interacciones microscópicas, el cual se expresa como sigue:

$$J\left(f, f'\right) = \int\int \left(f' f_1' - f f_1\right) \vartheta \sigma d\Omega d\vec{v}_1, \tag{1.2}$$

donde ϑ es la velocidad relativa dada por $\vartheta = |\vec{v}' - \vec{v}_1'| = |\vec{v} - \vec{v}_1|$, σ es la sección transversal de la colisión entre un par de partículas y Ω el ángulo sólido correspondiente a la colisión. Las primas denotan las cantidades después de la colisión.

Los observables físicos vinculados con la ecuación se obtienen por medio de la definición de promedio estadístico

$$\langle \psi\left(\vec{v}\right)\rangle = \frac{1}{n}\int \psi\left(\vec{v}\right) f d\vec{v}, \tag{1.3}$$

donde $n = n(\vec{r}, t)$ es el número de partículas por unidad de volumen, $\psi = \psi(\vec{v})$ es un invariante colisional y $d\vec{v}$ es el elemento de volumen en el espacio de velocidades.

Usando la definición (1.3) se define el flujo de carga con el invariante q, el cual se encuentra dado por

$$\vec{J} = nq\langle\vec{v}\rangle. \tag{1.4}$$

Para obtener la expresión del flujo de carga es necesario hacer uso de la función de distribución f, dicha función es la solución de la ecuación (1.1). Resolver la ecuación de Boltzmann resulta ser complejo, por lo que conviene usar el método de Chapman-Enskog-Hilbert [5]. Este método consiste en expresar la función de distribución como una serie de la forma:

$$f = f^{(0)} + \mu f^{(1)} + \mu^2 f^{(2)} + \ldots, \tag{1.5}$$

donde $f^{(0)}$ es la función de distribución en equilibrio local, $f^{(1)}$ es la función a primer orden y $f^{(2)}$ a segundo orden en los gradientes, que corresponden a los regímenes de Euler, Navier-Stokes y Burnett, respectivamente. El término μ es el parámetro de Knudsen, el cual corresponde al cociente entre el camino libre medio λ y la longitud característica del sistema L que contiene al gas. En 1953, Bhatnagar, Gross y Krook (BGK) propusieron modelar el término integral de colisión (1.2) con una expresión simplificada la cual preserva algunas propiedades del Kernel colisional y que tiene la forma [11]:

$$J(ff') \sim -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}, \tag{1.6}$$

donde τ es un tiempo de relajación característico. Para colisiones protón-electrón el valor de τ es de aproximadamente 10^{-11} segundos, mientras que para colisiones de protón-protón o electrón-electrón el valor aproximado es de 10^{-13} segundos [12]. La ecuación (1.6) es una representación de la razón de cambio de la función de distribución con respecto al tiempo en su evolución al estado de equilibrio.

La función de distribución en el primer orden en los gradientes se obtiene al introducir las expresiones (1.6) y (1.5) en la ecuación (1.1), obteniendo:

$$f^{(1)} = -\tau\left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m}\nabla\phi\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{v}}\right). \tag{1.7}$$

Usando la hipótesis de que la función de distribución es función de las variables $(n, T, \vec{u})$, el término temporal de la ecuación (1.7) se puede desarrollar como:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{u}}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \tag{1.8}$$

donde T es la temperatura y $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ es la velocidad hidrodinámica dada por:

$$\vec{u} = \frac{1}{n}\int \vec{v} f^{(0)} d\vec{v}. \tag{1.9}$$

Introduciendo la propuesta de BGK en la ecuación de Boltzmann junto con la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{u}}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} & + \\ +\vec{v}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m}\nabla\phi\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{v}} & = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau} = -\frac{f^{(1)}}{\tau}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

La función de distribución que es solución de la ecuación de Boltzmann para un gas no relativista de una sola componente en equilibrio local llamada función de distribución Maxwell-

Boltzmann y está dada por:

$$f_{NR}^{(0)} = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\left(\vec{v}-\vec{u}\right)^2}{2k_B T}\right) \tag{1.11}$$

donde $k_B = 1.3805 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann. De acuerdo con el método de Chapman-Enskog, la derivada temporal de la velocidad hidrodinámica debe expresarse en términos de gradientes espaciales y fuerzas externas en el orden inmediato inferior en el parámetro de Knudsen [5], esto es:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{q}{m}\nabla\phi - \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}. \tag{1.12}$$

La presión está dada por $p = nk_BT$ y la densidad está dada por $\rho = nm$ en el caso no relativista. Nótese que para obtener las contribuciones del campo eléctrico en el flujo de carga se tiene que usar la función de distribución $f^{(1)}$, es decir:

$$\vec{J} = nq\vec{u} + nq\int f^{(1)}\vec{v}d\vec{v}. \tag{1.13}$$

De manera que para obtener la ley de Ohm se requiere conocer la contribución del campo eléctrico en el flujo de carga. Ésta contribución proviene al introducir la ecuación (1.12) y el término $\frac{q}{m}\nabla\phi$ de la ecuación (1.7) en la expresión de $f^{(1)}$. Realizando el álgebra correspondiente se obtiene

$$\frac{q}{m}\nabla\phi\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{v}} = -\frac{q}{k_BT}f^{(0)}\nabla\phi\cdot\vec{c}, \tag{1.14}$$

donde $\vec{c}$ es la velocidad caótica, la relación entre dicha velocidad con la velocidad molecular e hidrodinámica se encuentra dada por

$$\vec{c} = \vec{v} - \vec{u}. \tag{1.15}$$

Por otro lado, el otro término que contiene el campo eléctrico proveniente de la ecuación (1.10), se expresa como

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{u}}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} &= \left(\frac{m}{k_BT}f^{(0)}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{q}{m}\nabla\phi - \nabla p\right)\\ &= \frac{q}{k_BT}f^{(0)}\nabla\phi\cdot\vec{c} - \frac{1}{nk_BT}f^{(0)}\nabla p\cdot\vec{c} - \frac{m\vec{c}}{k_BT}f^{(0)}\cdot\left(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right),\end{aligned} \tag{1.16}$$

Sumando las ecuaciones (1.14), (1.16) y despreciando los términos que no contienen al campo electroestático, se tiene la expresión:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{u}} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{q}{m}\nabla\phi \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{v}} \sim \left(\frac{q}{k_B T} f^{(0)} \nabla\phi \cdot \vec{c} - \frac{q}{k_B T} f^{(0)} \nabla\phi \cdot \vec{c} \right) = 0. \tag{1.17}$$

Es importante observar en esta expresión que se cancelan mutuamente las contribuciones del campo eléctrico para $f^{(1)}$. Por lo tanto, de acuerdo al formalismo presentado, el flujo eléctrico (1.4) no contendría al campo eléctrico y en consecuencia no es posible obtener la ley de Ohm a partir de este formalismo cinético. En consecuencia, el desarrollo elegido en estre trabajo de tesis para el cálculo de la ley de Ohm entra en contradicción con el comportamiento de los flujos de carga observados en el laboratorio.

1.1.1. Estado estacionario

En la sección anterior, se mostró que no es posible obtener la ley de Ohm usando únicamente el método de Chapman-Enskog junto con la aproximación BGK en la ecuación de Boltzmann. Sin embargo si además se hace uso de las hipótesis de estado estacionario, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ y se considera que el sistema es uniforme de modo que $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0$; es posible obtener la ley de Ohm [1, 2] como se muestra a continuación. Introduciendo dichas hipótesis en la ecuación de Boltzman (1.1) se tiene

$$\frac{q}{m}\nabla\phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \tag{1.18}$$

El flujo de carga eléctrica se encuentra dado por la ecuación (1.4). Usando la definición de promedio estadístico, ecuación (1.3), y el desarrollo de la función de distribución (1.5) en la ecuación (1.18) se obtiene la expresión para $f^{(1)}$ dada por:

$$f^{(1)} = -\tau \left(\frac{q}{m}\nabla\phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right). \tag{1.19}$$

Introduciendo la relación (1.15) y la definición de la velocidad molecular en la expresión dada para la densidad de corriente (1.4), se tiene

$$\vec{J} = nq\vec{u} + q \int \vec{c} \left(f^{(0)} + f^{(1)} \right) d\vec{c}. \tag{1.20}$$

Es importante observar que, por paridad, el primer término de la integral es cero, por lo que la contribución del campo eléctrico proviene del cálculo de la integral con $f^{(1)}$. La expresión para la densidad de corriente es

$$\vec{J} = nq\vec{u} + \sigma\vec{E}, \tag{1.21}$$

donde $\vec{E} = \nabla\phi$ es el campo eléctrico y $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$ es llamada la conductividad eléctrica [13].

1.1.2. Modelo de Drude y Lorentz

Drude fue el primero en elaborar una hipótesis de la conductividad eléctrica en materiales metálicos, tiempo después Lorentz trabajó las implicaciones de las ideas proporcionadas por Drude. El supuesto principal del modelo de Drude y Lorentz es que los electrones de valencia de un metal se pueden considerar como un gas ideal de partículas libres. Usando herramientas de mecánica estadística, se modelan los electrones libres con la distribución de Maxwell-Boltzmann cuando los electrones están en equilibrio térmico. Para un tiempo $t = t_0 + dt$ el promedio del momento de los electrones se encuentra dado por:

$$\langle m\vec{v}\,(t_0 + dt)\rangle = \left(1 - \frac{dt}{\tau_d}\right)\left(\langle m\vec{v}(t_0)\rangle + q\vec{E}dt\right), \tag{1.22}$$

donde τ_d es el tiempo libre medio de los protones y electrones. Reescribiendo la ecuación (1.22) y tomando $\delta t \to 0$ se tiene la ecuación diferencial resultante:

$$\frac{d}{dt}\langle m\vec{v}(t)\rangle = q\vec{E} - \frac{\langle m\vec{v}(t)\rangle}{\tau_d}. \tag{1.23}$$

Comparando la ecuación (1.23) con la ecuación (1.12), obtenida en la sección anterior, y despreciando el término de presión se puede observar que $\frac{d}{dt}\langle m\vec{v}(t)\rangle$ es un término de fuerza y este es agregado artificialmente. Integrando la ecuación diferencial anterior se tiene

$$\langle m\vec{v}(t)\rangle = q\tau_d\vec{E}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau_d}}\right), \tag{1.24}$$

por lo que el flujo de corriente, definido en la ecuación (1.4), es

$$\vec{J} = \left(\frac{nq^2\tau_d}{m}\right)\vec{E}, \tag{1.25}$$

obteniéndose así, la bien conocida ley de Ohm. La construcción del modelo de Drude-Lorentz hace referencia al promedio pero nunca especifica la definición del mismo. Las ecuaciones (1.21 y 1.25) corresponden a la expresión del flujo de corriente usando estado estacionario o el modelo de Drude y Lorentz, respectivamente. Como se puede observar ambas ecuaciones resultan ser distintas, esto se debe a que Drude y Lorentz propusieron su propia ecuación de movimiento en lugar de hacer uso del balance de partículas para establecer el flujo de carga.

1.2. Ecuaciones de conservación para sistemas simples relativistas

En esta sección introduciremos brevemente el procedimiento para calcular las ecuaciones de conservación para un fluido simple relativista. La cuadrivelocidad molecular para un fluido relativista se encuentra definida como

$$V^{\alpha} = \begin{bmatrix} \gamma_{(v)} v^{\ell} \\ \gamma_{(v)} c \end{bmatrix}, \tag{1.26}$$

donde v^{ℓ} es el vector de velocidad molecular, c es el valor de la velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8$ m/s y $\gamma_{(v)}$ es el factor de Lorentz dado por

$$\gamma_{(v)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{\ell} v_{\ell}}{c^2}}}. \tag{1.27}$$

La función de distribución usada para un fluido relativista monocomponente es la distribución de Jüttner en equilibrio [5, 14]:

$$f_{RE}^{(0)} = \frac{n}{4\pi c^3 z \mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right)} \exp\left(\frac{U^{\beta} V_{\beta}}{z c^2}\right), \tag{1.28}$$

donde $z = \frac{k_B T}{mc^2}$, $\mathcal{K}_n\left(\frac{1}{z}\right)$ es la función de Bessel modificada de segundo tipo de orden n y U^{β} es la velocidad hidrodinámica definida como:

$$U^{\beta} = \int V^{\beta} f^{(0)} d^{*}V, \tag{1.29}$$

donde el elemento de volumen en el espacio de velocidades es [15]

$$d^*V = \gamma_{(v)}^5 \frac{cd^3v}{V^4}. \tag{1.30}$$

La ecuación de Boltzmann en relatividad especial se encuentra dada por:

$$V^\alpha f_{,\alpha} = J\left(ff'\right). \tag{1.31}$$

Multiplicando la ecuación (1.31) por los invariantes colisionales $\psi = \{1, mV^\mu\}$ e integrando en el espacio de velocidades se tiene la ecuación de transporte:

$$\left[\int V^\alpha \psi f d^*V\right]_{;\alpha} = 0. \tag{1.32}$$

Es importante mencionar que el operador $()_;$ representa la derivada covariante, esta notación se usará en todo el trabajo de tesis.

Para el invariante colisional $\psi = 1$, se obtiene la ecuación de continuidad; para $\psi = mV^\ell$ se obtiene el balance de ímpetu y finalmente para $\psi = mV^4$ el balance de energía. El número de partículas por unidad de volumen se encuentra dado por

$$n = \int f\gamma_{(v)} d^*V, \tag{1.33}$$

Para establecer las ecuaciones de transporte en el sistema de referencia de Eckart [8, 14] se define el flujo de partículas paralelo a la velocidad hidrodinámica:

$$N^\mu = \int V^\mu f d^*V. \tag{1.34}$$

De la misma forma, el tensor de ímpetu-energía se define como

$$T^{\mu\nu} = m \int V^\mu V^\nu f d^*V. \tag{1.35}$$

Las ecuaciones de conservación corresponden a las expresiones

$$N^{\mu}_{;\mu} = 0, \tag{1.36}$$

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \tag{1.37}$$

Reescribiendo la ecuación (1.36) en términos de derivadas del tiempo propio, esto es $\dot{n} = U^{\mu} n_{,\mu}$, se obtiene la forma alternativa de la ecuación de continuidad

$$\dot{n} + n\theta = 0, \tag{1.38}$$

donde $\theta = U^{\mu}_{;\mu}$. Por otro lado para obtener la forma explícita del tensor de ímpetu-energía en términos de las variables termodinámicas locales y los flujos correspondientes se evalúa la integral (1.35) a primer orden en los gradientes. Este procedimiento involucra el uso de velocidades caóticas, obteniéndose la expresión [16]

$$T^{\mu\nu} = \frac{n\varepsilon}{c^2} U^{\mu} U^{\nu} + p h^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} q^{\mu} U^{\nu} + \frac{1}{c^2} U^{\mu} q^{\nu}. \tag{1.39}$$

En la ecuación anterior ε es la energía interna, p es la presión local, $\pi^{\mu\nu}$ es el tensor de Navier, q^{μ} es el flujo de calor y $h^{\mu\nu}$ es el proyector espacial definido como

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{U^{\mu} U^{\nu}}{c^2}, \tag{1.40}$$

donde $\eta^{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski con una asignatura $(+++-)$. Para obtener el balance de ímpetu-energía se usa la ecuación (1.37) junto con las expresiones (1.38) y (1.39), obteniéndose la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{n\varepsilon}{c^2} + \frac{p}{c^2}\right) \dot{U}^{\nu} + \left(\frac{n\dot{\varepsilon}}{c^2} + \frac{p}{c^2}\theta\right) U^{\nu} + p_{,\mu} h^{\mu\nu} \\ &+ \pi^{\mu}_{\nu;\mu} + \frac{1}{c^2}\left(q^{\mu}_{;\mu} U_{\nu} + q^{\mu} U_{\nu;\mu} + \theta q_{\nu} + U^{\mu} q_{\nu;\mu}\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Además se cumple la relación:

$$n\dot{\varepsilon} + p\theta = 0 \tag{1.42}$$

En esta sección se hizo una breve síntesis del procedimiento para establecer las ecuaciones de balance para un gas monocomponente a temperaturas altas. Es pertinente mencionar que se ha utilizado el sistema de referencia de Eckart donde el flujo de calor aparece en la ecuación (1.39)[8].

1.3. Espacio-tiempo curvo

En el presente trabajo se considerará un gas diluido en un espacio-tiempo curvo, por lo que son necesarios algunos conceptos de relatividad general que se manejarán durante el resto del trabajo. La teoría de la relatividad general describe la relación entre el espacio-tiempo. En la dinámica relativista las partículas siguen una trayectoria geodésica, cuya ecuación se encuentra dada por [17]:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{1.43}$$

El elemento de línea del espacio-tiempo se encuentra representado por ds y $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$ corresponde al símbolo de Christoffel definido como:

$$\Gamma^\mu_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\alpha}\right), \tag{1.44}$$

donde g es la métrica del espacio-tiempo. Dado que el gas se encuentra en un espacio-tiempo curvo las derivadas contendrán términos provenientes de la métrica, por lo que usando la ecuación (1.43) en la expresión de la derivada de la velocidad molecular se tiene

$$V^\beta V^\alpha_{;\beta} = V^\beta\left[\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}V^\lambda\right] = \frac{dV^\alpha}{d\tau_M} + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}V^\lambda V^\beta = 0, \tag{1.45}$$

donde τ_M es el tiempo propio de Minkowski. En este trabajo, usaremos la ecuación de Boltzmann en relatividad especial, se encuentra dada por la ecuación [5, 14]

$$V^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + V^\beta V^\alpha_{;\beta} = J\left(ff'\right). \tag{1.46}$$

Como se muestra en la ecuación (1.45) el término de fuerza se anula, por lo que la ecuación de Boltzmann en relatividad especial se encuentra dada por [18]:

$$V^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} = J\left(ff'\right). \tag{1.47}$$

En otras palabras, los efectos de campo están incluidos en la curvatura del espacio y no es necesario el término de aceleración.

En la siguiente sección se muestra que los efectos de fuerza son una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo.

1.4. Formalismo de Kaluza

Theodor Kaluza en 1921 incorpora una dimensión espacial adicional para seguir con las ideas de la relatividad, donde las fuerzas son una consecuencia de la presencia de campos, que a su vez están asociados con la curvatura del espacio-tiempo. Debido a que se trabajará en cinco dimensiones, utilizaremos letras mayúsculas que van del 1 al 5. En el formalismo de Kaluza se introduce un término que contiene la carga eléctrica en la quinta componente en del campo de velocidades, es decir:

$$V^{5} = \frac{q}{m\xi}, \tag{1.48}$$

el valor de la constante de acoplamiento es $\xi = \sqrt{\frac{16\pi G\varepsilon_0}{c^2}}$, G es la constante gravitacional cuyo valor es de $6.674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$ y ε_0 es la constante dieléctrica cuyo valor en el vacío es de $\frac{1}{c^2\mu_0} = 8.85418\times10^{-12}\frac{F}{m}$ [13]. Kaluza impone la condición cilíndrica como:

$$\frac{\partial}{\partial x^5} = 0. \tag{1.49}$$

Esta condición mantiene invariante a la ecuación de campo en el espacio de 4 dimensiones. La métrica que se usa en este trabajo será la métrica de Minkowski y el potencial electromagnético A_{μ}, considerado como una perturbación, se añade en la quinta columna y quinto renglón como se muestra a continuación:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta A_1 \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta A_2 \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \delta A_3 \xi \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{\delta \phi}{c} \xi \\ \delta A_1 \xi & \delta A_2 \xi & \delta A_3 \xi & \frac{\delta \phi}{c} \xi & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.50}$$

donde δA_ℓ corresponde a una perturbación del potencial electromagnético..

Debido a que se está trabajando en un formalismo pentadimensional es necesario redefinir los símbolos de Christoffel (1.44) incluyendo los términos correspondientes a la quinta dimensión:

$$\Gamma^{\mu}_{BL} = \frac{1}{2} g^{\mu A} \left(\frac{\partial g_{LA}}{\partial x^B} + \frac{\partial g_{AB}}{\partial x^L} - \frac{\partial g_{BL}}{\partial x^A} \right). \tag{1.51}$$

Usando esta definición junto con la condición cilíndrica para distintos valores de A, B y L existen varios términos que se anulan o son de segundo orden (consultar en el Apéndice A), los cuales se despreciarán. Introduciendo la ecuación de la trayectoria de las partículas en un espacio-tiempo curvo (1.43), la simetría de los símbolos de Christoffel y el valor de V^5, ecuación (1.48), se tiene

$$\frac{dV^\mu}{d\tau} = -2\Gamma^{\mu}_{5L} V^L V^5 = -\frac{2}{\xi} \frac{q}{m} \Gamma^{\mu}_{5L} V^L. \tag{1.52}$$

Observemos que existe una relación entre el potencial electromagnético y el símbolo de Christoffel ($\Gamma^{\mu}_{5\beta}$):

$$F^{\mu}_{\beta} = -\frac{2}{\xi} \Gamma^{\mu}_{5\beta} \tag{1.53}$$

donde F^{μ}_{β} es el tensor de Faraday dado por

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu} \tag{1.54}$$

La ecuación de campo de Einstein para el formalismo pentadimensional se encuentra dada por $\mathcal{G}_{MN} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{MN}$, en particular si $M = \mu$ y $N = 5$, esto es

$$\mathcal{G}_{5\nu} = \kappa T_{5\nu} \Rightarrow F^{\mu\nu}_{,\nu} = -\mu_0 J^\mu. \tag{1.55}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo de 4D corresponden a dos de las ecuaciones clásicas de Maxwell con fuentes [19]:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, && (1.56)\\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, && (1.57)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
A^{\mu} &= \left[\vec{A}, \frac{1}{c}\phi\right], && (1.58)\\
\vec{E} &= -\nabla \phi, && (1.59)\\
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A}. && (1.60)
\end{aligned}
$$

Para las ecuaciones de Maxwell sin fuentes:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} &= 0, && (1.61)\\
\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, && (1.62)
\end{aligned}
$$

estas provienen de la relación:

$$
F_{\mu\nu,\alpha} + F_{\alpha\mu,\nu} + F_{\nu\alpha,\mu} = 0. \tag{1.63}
$$

Observe que para $M = 5$ y $N = 5$ se obtiene la ecuación $\mathcal{G}_{55} = \kappa T_{55}$, que corresponde a una constante y finalmente para $M = 5$ y $N = \nu$.

En el siguiente capítulo se usarán estos resultados para establecer las ecuaciones de conservación en el formalismo pentadimensional.

Capítulo 2

Ecuaciones de conservación en la magnetohidrodinámica de Kaluza

Las ecuaciones de conservación en la teoría cinética se obtienen cuando se multiplica por un invariante colisional la ecuación de Boltzmann y se integra con respecto a la velocidad, esta metodología también se aplicará en el formalismo de Kaluza. En este capítulo se desarrollará a detalle el procedimiento para obtener dichas ecuaciones y se analizarán los efectos físicos obtenidos en el formalismo pentadimensional.

2.1. Ecuación de Boltzmann en 5D

En el formalismo de Kaluza, la ecuación de Boltzmann para un gas monocomponente eléctricamente cargado se encuentra dada por

$$V^A f_{,A} + V^\beta V^\alpha_{;\beta} \frac{\partial f}{\partial V^A} = J(f, f'), \tag{2.1}$$

donde f es la función de distribución del gas, $J(f, f')$ es el Kernel colisional y V^A es tensor de velocidades de las partículas definido como

$$V^A = \begin{bmatrix} \gamma_{(v)} v^\ell \\ c\gamma_{(v)} \\ \frac{1}{\xi}\frac{q}{m} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

En la sección (1.3) se demostró que en la ecuación de Boltzmann relativista (1.47) se cancela el término de aceleración, debido a que las partículas del gas se mueven sobre una línea geodésica en un espacio-tiempo curvo. Usando la condición cilíndrica se puede observar que en este formalismo sucede lo mismo, por lo anterior la ecuación (2.1) se reduce a

$$V^A f_{,A} = J(f, f'). \tag{2.3}$$

En todo lo que resta del capítulo se trabajará con la ecuación de Boltzmann (2.3).

2.2. Ecuación de transporte de Enskog

Para el establecimiento de las ecuaciones de balance [10, 14, 20], es suficiente con multiplicar la ecuación (2.3) por el invariante colisional $\psi = mV^B$ e integrando

$$mV^A V^B f_{,A} = mV^B J(f, f'), \tag{2.4}$$

Se puede observar que para $B = 5$ se obtiene la ecuación de conservación de partículas, para $B = 1, 2, 3$ el balance de ímpetu y finalmente para $B = 4$ el balance de energía. Integrando la ecuación anterior respecto al tensor de velocidades. Al multiplicar el kernel colisional por el invariante e ingrando en el espacio de velocidades se vuelve cero, por lo que se tiene la expresión

$$m \int V^A V^B f_{,A} d^*V = 0. \tag{2.5}$$

El elemento de volumen en el espacio de velocidades se encuentra dado por [21]

$$d^*V = \gamma_{(k)}^5 c \frac{d^3k}{V^4} = \gamma_{(k)}^4 d^3k = 4\pi c^3 \sqrt{\gamma_{(k)}^2 - 1}\, d\gamma_{(k)}, \tag{2.6}$$

donde el factor de Lorentz para la velocidad caótica se encuentra dado por $\gamma_{(k)} = \left(1 - \frac{k^\ell k_\ell}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ y la velocidad caótica se espresa como

$$K^A = \begin{bmatrix} \gamma_{(v)} k^\ell \\ c \\ \frac{1}{\xi}\frac{q}{m} \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Usando la ecuación de la línea geodésica y la derivada covariante se reescribe la ecuación (2.5) quedando de la forma:

$$m\left(\int V^A V^B f d^*V\right)_{;A} = 0, \tag{2.8}$$

El cálculo detallado se puede consultar en el apéndice B. Siguiendo la metodología usual, se define el tensor de energía-momento en el formalismo de Kaluza como:

$$T^{AB} = m\int V^A V^B f d^*V \tag{2.9}$$

Las ecuaciones de conservación corresponden a la expresión

$$T^{BA}_{;A} = 0. \tag{2.10}$$

El lector puede observar que no se definió por separado el flujo de partículas N^A, esto se debe a que dicho flujo corresponde al elemento T^{5A} dividido por la carga como se muestra a continuación:

$$J^{\mu} = \xi T^{5\mu} = \xi V^5 m\int f V^{\mu} d^*V = q\int f V^{\mu} d^*V = qN^{\mu}. \tag{2.11}$$

El flujo J^{μ} es denominado flujo de corriente [16], el cual se obtendrá en el siguiente capítulo. Para el establecimiento de las ecuaciones de balance se usará la función de equilibro de Jüttner [5, 14] la cual se encuentra dada por

$$f^{(0)} = \frac{n}{4\pi c^3 z \mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right)} e^{\frac{U_\beta V^\beta}{zc^2}} \tag{2.12}$$

Si se evalúa la expresión (2.9) con la distribución en equilibrio (2.12) se obtiene el tensor de ímpetu-energía en equilibrio ($\overset{\circ}{T}$):

$$\overset{\circ}{T}{}^{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{n\varepsilon}{c^2}U^{\mu}U^{\nu} + ph^{\mu\nu} & \frac{nq}{\xi}U^{\nu} \\ \hline \frac{nq}{\xi}U^{\nu} & \frac{n}{\xi^2}\frac{q^2}{m^2}\frac{\mathcal{K}_1\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right)} \end{array}\right) \tag{2.13}$$

donde la energía interna ε es

$$\varepsilon = mc^2\left(3z + \frac{\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right)}\right). \tag{2.14}$$

En el caso no-relativista se utiliza la ecuación (1.15) para expresar la velocidad como la suma de dos componentes, dicha expresión es útil para identificar si la contribución proviene del arrastre o si es estrictamente termodinámica. Siguiendo la misma idea, en el desarrollo del trabajo se expresa el cuadrivector de velocidades como la suma de una componente paralela a la velocidad hidrodinámica U^μ y una componente ortogonal a la velocidad caótica K^ν [16], como sigue:

$$V^\mu = \mathcal{L}^\alpha_\nu K^\nu = \gamma U^\mu + h^\mu_\nu V^\nu = \gamma U^\mu + \mathcal{R}^\mu_\nu K^\nu, \tag{2.15}$$

donde $\mathcal{R}^\mu_\nu = h^\mu_\alpha \mathcal{L}^\alpha_\nu$ y $\mathcal{L}^\alpha_\nu$ es la transformación de Lorentz, corresponde a la ecuación (E.1) esta expresada en el apéndice E. Esta equivalencia fue identificada fenomenológicamente por Eckart y posteriormente utilizada por García-Perciante usando teoría cinética [22]. En el apéndice E se puede verificar a detalle la relación (2.15).

2.3. Ecuaciones de conservación en el régimen de Euler

Para el establecimiento de las ecuaciones en el régimen de Euler, se usa la función de distribución de Jüttner en equilibrio (2.12) y la ecuación (2.10). El balance de partículas en el formalismo pentadimensional permanece idéntico al obtenido en el caso relativista, se evalúa

$$N^\mu_{;\mu} = \left[\int f^{(0)} V^\mu d^*V\right]_{;\mu} = 0, \tag{2.16}$$

teniendo así

$$U^\mu n_{,\mu} + nU^\mu_{;\mu} = 0, \tag{2.17}$$

Usando la expresión para la derivada total se obtiene la ecuación de conservación de partículas [14]

$$\dot{n} + n\theta = 0. \tag{2.18}$$

Para obtener la ecuación de Euler en su versión tetradimensional se usa $A = 1, 2, 3, 4$ en la ecuación (2.10), y desarrollando la derivada covariante se tiene

$$\left(\frac{n\varepsilon}{c^2}+\frac{p}{c^2}\right)U^{\mu}U^{\nu}_{;\nu}+\left(\frac{n\varepsilon}{c^2}+\frac{p}{c^2}\right)U^{\mu}_{;\nu}U^{\nu}+ph^{\mu\nu}_{;\nu}+p_{,\nu}h^{\mu\nu}=0, \tag{2.19}$$

multiplicando los términos y agrupando adecuadamente la ecuación junto con la ecuación de continuidad en el segundo término se obtiene

$$\tilde{\rho}\dot{U}^{\nu}+h^{\nu\alpha}p_{,\alpha}=-2\Gamma^{\nu}_{\alpha5}T^{5\alpha} \tag{2.20}$$

Observe que el balance de partículas y el balance de ímpetu permanecen iguales al caso relativista. Mientras que la ecuación de Euler tiene una contribución del campo electromagnético, la cual proviene del hecho de que el fluido se encuentra en un espacio-tiempo curvo [6].

$$\tilde{\rho}\dot{U}^{\nu}+h^{\nu\alpha}p_{,\alpha}=nqF^{\nu}_{\lambda}U^{\lambda} \tag{2.21}$$

donde $\tilde{\rho}$ se encuentra dado por

$$\tilde{\rho}=\left(\frac{n\varepsilon}{c^2}+\frac{p}{c^2}\right). \tag{2.22}$$

La ecuación (2.21) se utilizará en la siguiente sección para la deducción de la contribución electromagnética de orden uno en los gradientes a $f^{(1)}$. En este procedimiento se utilizarán la hipótesis de equilibrio local y el método de Chapman-Enskog.

2.4. Ecuaciones de balance en el régimen de Navier-Stokes

Para obtener las ecuaciones de balance en el régimen de Navier-Stokes se debe usar la relación (2.10) siguiendo la metodología mostrada anteriormente, pero evaluando el tensor energía-momentum con $f^{(1)}$. Es de interés en este trabajo obtener las contribuciones electromagnéticas a los flujos de partículas y de calor.

2.4.1. Función de distribución a primer orden en los gradientes

Haciendo uso del método Chapman-Enskog-Hilbert para la función de distribución de Jüttner (2.12) y la aproximación del kernel colisional (1.6) en la ecuación de Boltzmann para el formalismo pentadimensional se tiene

$$f^{(1)} = -\tau \left[V^A f^{(0)}_{,A} + \dot{V}^A \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V^A} \right] \tag{2.23}$$

Para el primer término se usa la hipótesis funcional para la función de distribución en el formalismo de Kaluza, es decir:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U^B} U^B_{;\alpha}. \tag{2.24}$$

El lector puede recordar que en la teoría Kaluza se utiliza la condición cilíndrica $\frac{\partial}{\partial x^5} = 0$. Usando el hecho de que $\dot{V}^A = 0$, la expresión para $f^{(1)}$ es

$$f^{(1)} = -\tau V^\alpha \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U^\beta} U^\beta_{;\alpha} \right). \tag{2.25}$$

La contribución electromagnética proviene del último término de la ecuación (2.25). Introduciendo la definición de la derivada covariante se desarrolla el último término obteniéndose

$$V^\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U^\beta} U^\beta_{;\alpha} = \frac{m}{k_B T} V^\alpha V_\beta \left(\frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha L} U^L \right) f^{(0)} = \frac{m}{k_B T} V^\alpha V_\beta \left(U^\beta_{,\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha 5} U^5 \right) f^{(0)} \tag{2.26}$$

Para determinar la contribución electromagnética se usará la descomposición de Eckart (2.15). Usando el hecho de que la derivada total es $\dot{U}^\beta = U^\beta_{;\alpha} U^\alpha$ e introduciendo la ecuación de Euler (2.21) en (2.26) se tiene

$$\frac{m}{k_B T} f^{(0)} \mathcal{R}^\mu_\beta K_\mu \gamma \dot{U}^\beta = \frac{m}{\tilde{\rho} k_B T} f^{(0)} \mathcal{R}^\mu_\beta K_\mu \gamma \left(nq U_\eta F^{\beta\eta} - h^{\beta\eta} p_{,\eta} \right) \tag{2.27}$$

Finalmente hemos obtenido la expresión de la contribución electromagnética para la función de distribución a primer orden en los gradientes

$$f^{(1)}_{[EM]} = -\tau\gamma\frac{q}{k_B T}\frac{nm}{\tilde{\rho}}\mathcal{R}^{\mu}_{\beta}K_{\mu}U_{\eta}F^{\beta\eta}f^{(0)} \tag{2.28}$$

Para obtener las ecuaciones de conservación en el régimen de Navier-Stokes basta con introducir la expresión para $f^{(1)}$ en el tensor (2.10). Es de nuestro interés encontrar las contribuciones electromagnéticas en los flujos por lo que en el siguiente capítulo se establecerán el flujo de partículas y el flujo de calor.

Capítulo 3

Flujos y fuerzas termodinámicas

En el presente capítulo se obtendrán las contribuciones electromagnéticas al flujo de calor y al flujo de partículas en el formalismo pentadimensional, dichos flujos hacen uso de la función de distribución a primer orden en los gradientes, ecuación (2.28) obtenida en el capítulo anterior.

3.1. Flujo de partículas

El flujo de partículas en el formalismo pentadimensional se encuentra definido en la ecuación (2.11). Haciendo uso del método de Chapman-Enskog-Hilbert para la distribución de Jüttner y la aproximación del kernel colisional en dicha ecuación, se puede observar que la contribución asociada a $f^{(0)}$ es cero, por lo tanto

$$J^{\nu} = nq \int V^{\nu} f^{(1)} d^{*}V. \tag{3.1}$$

La contribución electromagnética de la densidad de corriente es:

$$J^{\nu}_{[EM]} = nq \int V^{\nu} f^{(1)}_{[EM]} d^{*}V. \tag{3.2}$$

Usando la expresión de la velocidad molecular ecuación (2.15), y el hecho de que $d^{*}V = d^{*}K$ se tiene

$$J^{\nu}_{[EM]} = -\tau \frac{q^2}{k_B T} \frac{nm}{\tilde{\rho}} \mathcal{R}^{\mu}_{\beta} \mathcal{R}^{\nu}_{\lambda} U_{\alpha} F^{\alpha\beta} \int \gamma^3 k^{\lambda} k_{\mu} f^{(0)} d^{*}K, \tag{3.3}$$

donde $\tilde{\rho} = nm\mathcal{G}\left(\frac{1}{z}\right)$ [14], el término $\mathcal{G}\left(\frac{1}{z}\right)$ se define como el cociente $\frac{K_3\left(\frac{1}{z}\right)}{K_2\left(\frac{1}{z}\right)}$ y $F^{\alpha\beta}$ corresponde al tensor de Faraday. Evaluando la expresión (3.3) se obtiene finalmente

$$J^{\nu}_{[EM]} = -\tau \frac{nq^2}{m} \mathcal{R}^{\lambda}_{\beta} \mathcal{R}^{\nu}_{\lambda} U_{\alpha} F^{\alpha\beta} \tag{3.4}$$

La ecuación anterior corresponde a la contribución electromagnética de la densidad de corriente. En el caso electroestático esta última expresión se reduce a

$$J^{\ell}_{[EM]} = -\tau \frac{nq^2}{m} \phi^{,\ell}, \tag{3.5}$$

que corresponde a la ley de Ohm, donde $\sigma = \frac{nq^2}{m}$ y ϕ al potencial electroestático. El formalismo pentadimensional ha permitido obtener la ley de Ohm haciendo uso de la teoría cinética, sin suponer estado estacionario en la ecuación de Boltzmann.

3.2. Flujo de calor

La contribución electromagnética para el flujo de calor se encuentra dado por [16]:

$$J^{\nu}_{[Q,EM]} = mc^2 \int (\gamma - 1) \gamma V^{\nu} f^{(1)}_{[EM]} d^* V. \tag{3.6}$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en la ecuación (3.6) y evaluando en el sistema comóvil, es decir si nos posicionamos sobre el gas en movimiento, la expresión anterior se reduce a

$$J^{\nu}_{[Q,EM]} = -\tau mc^2 \frac{q}{k_B T} \frac{nm}{\tilde{\rho}} \mathcal{R}^{\mu}_{\beta} U_{\eta} F^{\beta\eta} \int \gamma^4 k^{\nu} k_{\mu} f^{(0)} d^* K. \tag{3.7}$$

Evaluando la ecuación (3.7) se obtiene

$$J^{\nu}_{[Q,EM]} = -\tau nqmc^2 \left\{ 5z - 1 + \frac{1}{\mathcal{G}\left(\frac{1}{z}\right)} \right\} U_{\eta} F^{\alpha\eta} \mathcal{R}^{\lambda}_{\beta} \mathcal{R}^{\nu}_{\lambda}. \tag{3.8}$$

Para simplificar la expresión anterior, se define

$$\mathcal{B} = \tau n k_B c^2 \left\{ 5z - 1 + \frac{1}{\mathcal{G}\left(\frac{1}{z}\right)} \right\}. \tag{3.9}$$

Al reescribir la ecuación (3.8) con $\mathcal{B}$, evaluar para valores pequeños de z y comparando con el caso electroestático se obtiene la siguiente relación que resultará útil en análisis posteriores:

$$J^{\ell}_{[Q,E]} = -\mathcal{B}\frac{qm}{k_B}E^{\ell} \tag{3.10}$$

donde $\mathcal{B} \sim \frac{5}{2}\frac{nk_B^2 T\tau}{m}$, se puede observar que se obtiene la relación Wiedemann-Franz [13, 23]:

$$\frac{\mathcal{B}}{\sigma} = \frac{5}{2}\frac{k_B^2 T}{q^2}. \tag{3.11}$$

3.3. Producción de entropía

Para el cálculo de la producción de entropía es necesario primero utilizar la definición del cuadriflujo de entropía S^{μ}, el cual se encuentra dado por

$$S^{\mu} = -k_B \int V^{\mu} f\left(\ln f\right) d^*V. \tag{3.12}$$

Un cálculo directo muestra que la ecuación de balance para el cuadriflujo de entropía corresponde a

$$S^{\mu}_{;\mu} = \sigma_s \tag{3.13}$$

donde σ es la producción de entropía dada por

$$\sigma_s = -k_B \int J\left(ff'\right)\left(\ln f\right) d^*V. \tag{3.14}$$

Usando el método de Chapman-Enskog y las propiedades de los logaritmos para el término $\ln f$ se tiene

$$\ln f = \ln f^{(0)} + \ln\left(1+\phi\right) \tag{3.15}$$

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación (3.14) y separando las integrales se tiene:

$$\sigma_s = -k_B \int J\left(ff'\right)\ln f^{(0)} d^*V - k_B \int J\left(ff'\right)\ln\left(1+\phi\right) d^*V \tag{3.16}$$

Dado que la producción de entropía en equilibrio es cero nos concentraremos en el cálculo del segundo término del lado derecho de la ecuación anterior. Usando la relación $\ln(1+\phi) \sim \phi$ se tiene

$$\sigma_s \cong -k_B \int J(ff')\,\phi d^*V \tag{3.17}$$

Haciendo uso la versión pentadimensional de la ecuación de Boltzmann (2.3), la producción de entropía adquiere la forma

$$\sigma_s \cong -\tau k_B \int V^A f_{,A}\phi d^*V \tag{3.18}$$

Usando la hipótesis funcional para el término $V^A f_{,A}$ y observando que la derivada de la velocidad hidrodinámica debe de ser una derivada covariante porque el gas se encuentra en un espacio-tiempo curvo, se tiene

$$V^A f_{,A} = V^A\left(\frac{\partial f}{\partial n}n_{,A} + \frac{\partial f}{\partial T}T_{,A} + \frac{\partial f}{\partial U^\beta}U^\beta_{;A}\right). \tag{3.19}$$

Los dos primeros términos de la ecuación anterior ya se han trabajado. En el último término aparecen las contribuciones electromagnéticas por la derivada covariante, por lo que basta con desarrollar el término:

$$V^A\left(\frac{\partial f}{\partial U^\beta}U^\beta_{;A}\right) = \frac{m}{k_BT}V^\alpha V_\beta\left(U^\beta_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha 5}U^5\right). \tag{3.20}$$

Usando la descomposición de Eckart (2.15) para $V^\alpha V_\beta \Gamma^\beta_{\alpha 5}$, tenemos finalmente el valor

$$V^A\left(\frac{\partial f}{\partial U^\beta}U^\beta_{;A}\right)_{[EM]} = \frac{q}{k_BT}\frac{nm}{\tilde{\rho}}R^\mu_\beta K_\mu U_\eta F^{\beta\eta} f^{(0)}. \tag{3.21}$$

Por lo tanto

$$\sigma_{s[EM]} \cong -k_B\tau_c \frac{q}{k_BT}\frac{nm}{\tilde{\rho}}R^\mu_\beta U_\eta F^{\beta\eta}\int\left(\gamma K_\mu f^{(0)}\right)\phi d^*V. \tag{3.22}$$

Tomando únicamente la integral de la ecuación (3.22), esta se puede expresar como:

$$\int \gamma K_\mu f^{(0)}\phi d^*V = \frac{q}{k_BT}\frac{nm}{\tilde{\rho}}R^\mu_\beta U_\eta F^{\beta\eta}\int \gamma^4 k_\mu k^\nu f^{(0)} d^*K. \tag{3.23}$$

Es pertinente observar que la contribución electromagnética de la producción de entropía está relacionada con el flujo de calor:

$$J^{\nu}_{[Q,EM]} = mc^2 \frac{q}{kT}\frac{nm}{\tilde{\rho}} R^{\mu}_{\beta} U_{\eta} F^{\beta\eta} \int \gamma^4 k^{\nu} k_{\mu} f^{(0)} d^* K. \tag{3.24}$$

Finalmente, la relación entre la producción de entropía y el flujo de calor es:

$$\sigma_{s[EM]} = -k_B \tau \frac{q}{k_B T}\frac{nm}{\tilde{\rho}} R^{\mu}_{\beta} U_{\eta} F^{\beta\eta} \frac{J_{\mu[Q,EM]}}{mc^2}. \tag{3.25}$$

En dicha expresión se puede observar que la producción de entropía contiene el campo eléctromagnético y el flujo de calor. Al estudiar el caso no relativista, se puede observar que en el formalismo pentadimensional la contribución de la producción de entropía para el sistema simple es distinta de cero. En cambio en el formalismo 4D, se puede observar que la producción de entropía se cancela cuando $z \to 0$ si se compara con la ecuación (23) del trabajo [18].

De lo anterior, se concluye que el formalismo pentadimensional presenta ventajas conceptuales con respecto a su contraparte tetradimensional en un espacio de Minkowski.

Capítulo 4

Establecimiento de flujos en mezclas binarias inertes en presencia del campo eléctrico

Es de sumo interés el estudio de mezclas binarias debido a que en la naturaleza comúnmente se pueden encontrar fluidos que contienen electrones y protones. Este tipo de sistemas son usados en distintos procesos físicos tales como reactores de fusión, confinamiento de plasmas, creación de energía limpia, entre otros.

En este capítulo se obtendrán el flujo de partículas y el tensor de energía-ímpetu desde dos sistemas de referencia distintos, sistema de referencia de Eckart y de Landau, se trabajarán con los índices del 1 al 4 debido a que las contribuciones de la quinta dimensión se obtuvieron en los capítulos pasados. La definición de la velocidad baricéntrica así como la del promedio estadístico son cruciales para visualizar las diferencias de ambos sistemas de referencia.

Para introducir al lector se detallará el cálculo de la velocidad baricéntrica en el caso no relativista, después se procederá a establecer la velocidad baricéntrica en dos diferentes sistemas de referencia para el caso relativista.

4.1. Caso no relativista

La ecuación de Boltzmann para el sistema binario en presencia del campo electromagnético para el caso no relativista se encuentra dada por

$$\frac{\partial f_{(i)}}{\partial t} + \vec{v}_{(i)} \cdot \frac{\partial f_{(i)}}{\partial \vec{r}_{(i)}} + \frac{q_{(i)}\vec{E}}{m_{(i)}} \cdot \frac{\partial f_{(i)}}{\partial \vec{v}_{(i)}} = \sum J(f_{(i)} f_{(j)}), \quad i = 1, 2. \tag{4.1}$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{v}_{(i)}$ es el vector de velocidades, $\vec{r}_{(i)}$ es la posición, $f_{(i)}$ es la función de distribución, $q_{(i)}$ es la carga y $f_{(i)}^{(0)}$ es la función de distribución en equilibrio para la especie (i). Para establecer las ecuaciones de balance, el lado derecho de la ecuación de Boltzmann se modelará con la aproximación de BGK para expresar el kernel colisional $J(f_j f_i)$ [11]. Multiplicando la ecuación (4.1) por el invariante colisional $m_{(i)}$ e integrando, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int m_{(i)} f_{(i)} d\vec{v}_{(i)}\right) + \nabla \cdot \left(\int m_{(i)} \vec{v}_{(i)} f_{(i)} d\vec{v}_{(i)}\right) = 0. \tag{4.2}$$

La definición de promedio estadístico por especie en el caso no relativista se encuentra dada por

$$\langle \psi_{(i)} \rangle = \frac{1}{n_{(i)}} \int \psi_{(i)} f_{(i)} d\vec{v}_{(i)}, \tag{4.3}$$

donde $n_{(i)}$ es el número de partículas por especie, definido como

$$n_{(i)} = \int f_{(i)} d\vec{v}_{(i)}. \tag{4.4}$$

La velocidad hidrodinámica por especie se encuentra dada por el promedio de la velocidad molecular

$$\vec{u}_{(i)} = \langle \vec{v}_{(i)} \rangle = \frac{1}{n_{(i)}} \int \vec{v_{(i)}} f_{(i)} d\vec{v}_{(i)}. \tag{4.5}$$

A diferencia del sistema simple, la velocidad molecular se expresa como la suma de la velocidad caótica $\vec{c}_{(i)}$ y la velocidad baricéntrica $\vec{u}$. Hasta el momento no se ha dado una expresión para la velocidad baricéntrica, primero se estableceran las ecuaciones de movimiento para poder establecer una definición de $\vec{u}$. Para un sistema multicomponente, la velocidad molecular por especie en el sistema no relativista se encuentra dado por:

$$\vec{v}_{(i)} = \vec{c}_{(i)} + \vec{u}. \tag{4.6}$$

Usando la definición de promedio (4.3) e introduciendo la expresión (4.6) en la ecuación (4.2) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_{(i)}n_{(i)}\vec{u}_{(i)}\right) + \nabla\cdot\left(m_{(i)}n_{(i)}\left\langle\vec{c}_{(i)}\right\rangle + m_{(i)}n_{(i)}\vec{u}\right) = 0. \tag{4.7}$$

Es conveniente definir el flujo difusivo de la especie (i) está dada por

$$\vec{J}_{(i)} = n_{(i)}m_{(i)}\left\langle\vec{c}_{(i)}\right\rangle. \tag{4.8}$$

Se multiplica la ecuación (4.7) por la carga $q_{(i)}$, obteniéndose la densidad de corriente asociada a la velocidad caótica

$$\vec{J}_{(i)} = n_{(i)}m_{(i)}q_i\left\langle\vec{c}_{(i)}\right\rangle = m_{(i)}q_{(i)}\int\vec{c}_{(i)}\left(f^{(0)}_{(i)} + \mu f^{(1)}_{(i)}\right)d\vec{c}_{(i)}. \tag{4.9}$$

Los términos distintos a cero de la densidad de corriente se dan a primer orden en los gradientes de la función de distribución, en el capítulo 3 se obtuvo dicha función para un sistema monocomponente. Es pertinente recordar que la función de distribución para mezclas binarias se encuentra dada por

$$f^{(0)}_{NR(i)} = n_{(i)}\left(\frac{m_{(i)}}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m_{(i)}\left(\vec{v}_{(i)}-\vec{u}\right)^2}{2k_BT}\right]. \tag{4.10}$$

A continuación se presenta la generalización para el sistema binario.

$$f^{(1)}_{(i)} = -\tau\left[\frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial t} + \vec{v}_{(i)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial\vec{r}_{(i)}} + \frac{q_i\vec{E}}{m_{(i)}}\frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial\vec{v}_{(i)}}\right]. \tag{4.11}$$

Usando la hipótesis funcional para la función de distribución por especie se tiene:

$$\frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial t} = \left[\frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial n_{(i)}}\frac{\partial n_{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial T_{(i)}}\frac{\partial T_{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial\vec{u}}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right]. \tag{4.12}$$

Para identificar los términos que contienen los efectos de campo basta con calcular

$$f^{(1)}_{[i,EM]} = -\tau \left[\frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial \vec{u}} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{q_i \vec{E}}{m_{(i)}} \cdot \frac{\partial f^{(0)}_{(i)}}{\partial \vec{v}_{(i)}} \right]. \tag{4.13}$$

Siguiendo la metodología usual se utiliza la ecuación de Euler para la obtención de $f^{(1)}_{[i,EM]}$, dicha ecuación es distinta a la obtenida en el sistema monocomponente (2.21). El hecho de que la ecuación de Euler en el sistema monocomponente y binario sean distintas es debido a la definición de la velocidad baricéntrica. La ecuación de Euler en el sistema binario es:

$$\left(n_{(1)} m_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)}\right) \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = -\nabla p + \left(n_{(1)} q_1 + n_{(2)} q_2\right) \vec{E} \tag{4.14}$$

Introduciendo la ecuación (4.14) en la expresión para $f^{(1)}_{[i,EM]}$ se tiene

$$f^{(1)}_{[i,EM]} = -\tau \left[\frac{m_{(i)} \vec{c}_i}{k_B T} \cdot f^{(0)}_{(i)} \left[\frac{n_{(1)} q_1 + n_{(2)} q_2}{n_{(1)} m_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)}} \vec{E} \right] - \frac{q_i \vec{E}}{m_i} \cdot \left(\frac{m_i \vec{c}_i}{k_B T} \right) f^{(0)}_{(i)} \right] \tag{4.15}$$

Se observa que si se supone cuasineutralidad $\left(n_{(1)} \sim n_{(2)}\right)$ en una mezcla de protones y electrones $\left(q_1 = -q_2\right)$ se tiene que

$$f^{(1)}_{[i,EM]} = f^{(0)}_{(i)} \frac{m_{(i)} \vec{E}}{k_B T} \cdot \vec{c}_{(i)} q_i \tag{4.16}$$

La ecuación anterior es similiar a la expresión obtenida para un sistema monocomponente en estado estacionario (1.19) y que conduce a la ley de Ohm.

4.1.1. Velocidad baricéntrica

Para el cálculo del balance de partículas de la mezcla, se toma la suma de la ecuación (4.7) para ambas especies, obteniendo así

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_{(1)} m_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)}\right) + \nabla \cdot \left[\left(n_{(1)} m_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)}\right) \vec{u} \right] = -\nabla \cdot \left(\vec{J}_{(1)} + \vec{J}_{(2)} \right), \tag{4.17}$$

donde $\vec{J}_{(i)}$ es el flujo difusivo definido en la ecuación (4.8), posteriormente se verá que el lado derecho es cero usando la definición de la velocidad baricéntrica. Para obtener el balance de ímpetu, se multiplica la ecuación (4.1) por el invariante colisional $m_{(i)}\vec{v}_{(i)}$, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_{(i)}\int \vec{v}_{(i)}f_{(i)}d\vec{v}_{(i)}\right)+\nabla\cdot\left(m_{(i)}\int \vec{v}_{(i)}\vec{v}_{(i)}f_{(i)}d\vec{v}_{(i)}\right)=-n_i q_{(i)}\vec{E}. \tag{4.18}$$

Usando la definición de promedio estadístico (4.3) y tomando la suma para ambas especies se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[m_{(1)}n_{(1)}\left\langle\vec{v}_{(1)}\right\rangle+m_{(2)}n_{(2)}\left\langle\vec{v}_{(2)}\right\rangle\right]+&\\ \nabla\cdot\left[m_{(1)}n_{(1)}\left\langle\vec{v}_{(1)}\vec{v}_{(1)}\right\rangle+m_{(2)}n_{(2)}\left\langle\vec{v}_{(2)}\vec{v}_{(2)}\right\rangle\right]&=-\left(n_{(1)}q_{(1)}+n_{(2)}q_{(2)}\right)\vec{E}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

A diferencia del sistema simple, el promedio de la velocidad caótica por especie no es cero debido a que

$$\left\langle\vec{c}_{(i)}\right\rangle=\left\langle\vec{v}_{(i)}\right\rangle-\left\langle\vec{u}\right\rangle=\vec{u}_{(i)}-\vec{u}. \tag{4.20}$$

Por otro lado, para obtener la expresión de la velocidad hidrodinámica $\vec{u}$ se introduce la relación (4.6) en el término correspondiente a la divergencia de la ecuación (4.19) obteniendo:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\Big[m_{(1)}n_{(1)}\left\langle\vec{c}_{(1)}\vec{c}_{(1)}\right\rangle+m_{(2)}n_{(2)}\left\langle\vec{c}_{(2)}\vec{c}_{(2)}\right\rangle&\\ +2\vec{u}\left(m_{(1)}n_{(1)}\left\langle\vec{c}_{(1)}\right\rangle+m_{(2)}n_{(2)}\left\langle\vec{c}_{(2)}\right\rangle\right)&\\ +\vec{u}\vec{u}\left(m_{(1)}n_{(1)}+m_{(2)}n_{(2)}\right)\Big]&=0.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Si se desea que los términos cruzados de la ecuación (4.21) sean cero es necesario que se satisfaga la relación

$$m_{(1)}n_{(1)}\left\langle\vec{c}_{(1)}\right\rangle+m_{(2)}n_{(2)}\left\langle\vec{c}_{(2)}\right\rangle=0, \tag{4.22}$$

usando la expresión (4.20) en la relación anterior se tiene:

$$m_{(1)}n_{(1)}\vec{u}_{(1)}+m_{(2)}n_{(2)}\vec{u}_{(2)}-\vec{u}\left(m_{(1)}n_{(1)}+m_{(2)}n_{(2)}\right)=0. \tag{4.23}$$

Resolviendo la ecuación (4.23) para $\vec{u}$, la expresión de la velocidad baricéntrica para el caso no relativista es:

$$\vec{u} = \frac{m_{(1)}n_{(1)}\vec{u}_{(1)} + m_{(2)}n_{(2)}\vec{u}_{(2)}}{m_{(1)}n_{(1)} + m_{(2)}n_{(2)}}. \tag{4.24}$$

Realizando las sustituciones correspondientes en la ecuación (4.19) y definiendo $\rho = m_{(1)}n_{(1)} + m_{(2)}n_{(2)}$ se obtiene el balance de ímpetu para mezclas binarias en el caso no relativista.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \nabla\cdot\left(\vec{T} + \rho\vec{u}\vec{u}\right) = \vec{E}\left(n_{(1)}q_1 + n_{(2)}q_2\right), \tag{4.25}$$

donde $\vec{T} = m_{(1)}n_{(1)}\left\langle\vec{c}_{(1)}\vec{c}_{(1)}\right\rangle + m_{(2)}n_{(2)}\left\langle\vec{c}_{(2)}\vec{c}_{(2)}\right\rangle$ es el tensor de esfuerzos usual. En esta sección se ha obtenido la velocidad baricéntrica para un sistema binario diluido no relativista en presencia del campo eléctrico en 4D. En la siguiente sección, se trabajará en dos sistemas de referencia distintos usando la teoría magnetohidrodinámica de Kaluza.

4.2. Caso relativista

La ecuación de Boltzmann relativista para la especie (i) en el formalismo pentadimensional de Kaluza se encuentra dada por:

$$V^A_{(i)}f_{(i),A} = \sum_j J\left(f_{(j)}f_{(i)}\right), \quad i = 1,2, \tag{4.26}$$

donde $f_{(i)}$ es la función de distribución para la especie (i) y $J\left(f_{(j)}f_{(i)}\right)$ es el kernel colisional. En equilibrio local, la contraparte relativista de la ecuación (4.10) se encuentra dada por la distribucción de Jüttner

$$f^{(0)}_{RE(i)} = \frac{n_{(i)}}{4\pi c^3 z_{(i)}\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z_{(i)}}\right)}\exp\left(-\frac{\gamma_{(i)}}{z_{(i)}}\right). \tag{4.27}$$

Para establecer las ecuaciones de balance se multiplica la ecuación (4.26) por los invariantes colisionales $\left\{m_{(i)}, m_{(i)}V^A_{(i)}\right\}$ para después integrar por ambos lados de la ecuación. En relatividad, el flujo de partículas se encuentra dado por:

$$N^A_{(i)} = m_{(i)}\int V_{(i)}f_{(i)}d^*V_{(i)}, \tag{4.28}$$

y el tensor de energía-momento en un espacio de 5 dimensiones se define como:

$$T_{(i)}^{AB} = m_{(i)} \int V_{(i)}^{A} V_{(i)}^{B} f_{(i)} d^{*} V_{(i)}. \tag{4.29}$$

En particular, para obtener el flujo de partículas se reemplazan los índices $A = 5$ y $B = \mu$ en la ecuación (4.29) obteniéndose así:

$$J_{(i)}^{\mu} = \xi T_{(i)}^{5\mu} = \xi V_{i}^{5} m_{(i)} \int f_{i} V_{(i)}^{\mu} d^{*} V_{(i)} = q_{(i)} \int f_{(i)} V_{(i)}^{\mu} d^{*} V_{(i)} = q_{(i)} N_{(i)}^{\mu}. \tag{4.30}$$

Para establecer el balance de partículas por especie corresponde a $N_{(i);\alpha}^{\alpha} = 0$. Las ecuaciones de balance de energía e ímpetu se encuentran contenidas en la ecuación

$$T_{;B}^{AB} = T_{(1);B}^{AB} + T_{(2);B}^{AB} = 0. \tag{4.31}$$

Así como en el caso no relativista donde la velocidad molecular se expresa como la suma de la velocidad caótica y baricéntrica ecuación (4.6), en esta sección se expresa la velocidad molecular en términos de una componente paralela a la velocidad baricéntrica U^{μ} y una componente perpendicular $K_{(i)}^{\mu}$ de la especie (i):

$$V_{(i)}^{\mu} = \mathcal{L}_{\alpha}^{\mu} K_{(i)}^{\alpha} = \gamma_{(K,i)} U^{\mu} + R_{\alpha}^{\mu} K_{(i)}^{\alpha}, \tag{4.32}$$

donde $\mathcal{L}_{\alpha}^{\nu}$ es la transformación de Lorentz, K^{α} es el cuadrivelocidad caótica, $\gamma_{(K,i)}$ es el factor de Lorentz asociado a la velociadad caótica y R_{α}^{μ} es el producto de la matriz de Lorentz y el proyector espacial $h_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{c^2} U_{\alpha} U^{\beta}$ expresada en la ecuación (46) y (47) de la referencia [16]. La forma específica de dicha descomposición se analizará cuidadosamente en el apéndice E. En las siguientes secciones se mostrará la expresión para la velocidad baricétrica con los dos diferentes sistemas de referencia.

4.2.1. Marco de referencia de Eckart

En la literatura es común definir desde un principio la velocidad baricéntrica desde el sistema de referencia de Eckart para después construir las ecuaciones de la hidrodinámica para mezclas. Se obtendrá la definición de la velocidad baricéntrica usando la metodología que se vio para el caso no relativista. El balance de partículas para una mezcla binaria para el caso relativista se encuentra dada por:

$$N^{\mu}_{;\mu} = m_{(1)} N^{\mu}_{(1);\mu} + m_{(2)} N^{\mu}_{(2);\mu} = 0, \tag{4.33}$$

donde

$$m_{(1)} N^{\mu}_{(1)} + m_{(2)} N^{\mu}_{(2)} = m_{(1)} \int f_{(1)} V^{\mu}_{(1)} d^{*}V_{(1)} + m_{(2)} \int f_{(2)} V^{\mu}_{(2)} d^{*}V_{(2)}. \tag{4.34}$$

Introduciendo la descomposición de la velocidad (4.32) en la ecuación (4.34) se tiene:

$$N^{\ell} = m_{(1)} \int f_{(1)} \left(\gamma_{(k,1)} U^{\ell} + R^{\ell}_{\alpha} K^{\alpha}_{(1)} \right) d^{*}K_{(1)} + m_{(2)} \int f_{(2)} \left(\gamma_{(k,2)} U^{\ell} + R^{\ell}_{\alpha} K^{\alpha}_{(2)} \right) d^{*}K_{(2)}. \tag{4.35}$$

Por notación, es conveniente definir el promedio estadístico en el sistema de referencia de Eckart como

$$\left\langle \psi_{(i)} \right\rangle_{Eck} = \frac{1}{n_{(i)}} \int \psi_{(i)} f_{(i)} d^{*}V_{(i)}, \quad \left\langle \gamma_{(K,i)} \right\rangle_{Eck} = 1, \tag{4.36}$$

donde

$$n_{(i)} = \int \gamma_{(i)} f^{(0)} d^{*}V_{(i)}. \tag{4.37}$$

De manera similar al caso no relativista, son diferentes las expresiones para la velocidad baricéntrica U^{μ} y la velocidad molecular por especie, la cual se encuentra definida como

$$U^{\mu}_{(i)} = \left\langle V^{\mu}_{(i)} \right\rangle_{Eck}. \tag{4.38}$$

Introduciendo la notación de promedio estadístico se reescribe la ecuación (4.35)

$$N^{\mu} = U^{\mu} \left(n_{(1)} m_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)} \right) + R^{\mu}_{\alpha} \left[m_{(1)} n_{(1)} \left\langle K^{\alpha}_{(1)} \right\rangle_{Eck} + m_{(2)} n_{(2)} \left\langle K^{\alpha}_{(2)} \right\rangle_{Eck} \right]. \tag{4.39}$$

En el sistema de referencia de Eckart, el flujo de partículas se expresa en términos de la velocidad baricéntrica, por lo que se debe satisfacer la siguiente ecuación

$$m_{(1)} n_{(1)} \left\langle K^{\alpha}_{(1)} \right\rangle_{Eck} + m_{(2)} n_{(2)} \left\langle K^{\alpha}_{(2)} \right\rangle_{Eck} = 0. \tag{4.40}$$

De la expresión para la velocidad molecular (4.32), se obtiene la velocidad caótica para la especie (i) en términos de la velocidad baricéntrica y la velocidad molecular

$$K^{\beta}_{(i)} = -\gamma_{(v,i)} U^{\beta} + R^{\beta}_{\nu} V^{\beta}_{(i)}. \tag{4.41}$$

Introduciendo la ecuación (4.41) en la expresión (4.40) se obtiene la relación

$$\begin{aligned} &-U^{\ell}\left(m_{(1)}n_{(1)}\left\langle\gamma_{(v,1)}\right\rangle_{Eck} + m_{(2)}n_{(2)}\left\langle\gamma_{(v,2)}\right\rangle_{Eck}\right) & (4.42)\\ &+R^{\ell}_{\nu}\left(m_{(1)}n_{(1)}\left\langle V^{\nu}_{(1)}\right\rangle_{Eck} + m_{(2)}n_{(2)}\left\langle V^{\nu}_{(2)}\right\rangle_{Eck}\right) = 0, & (4.43)\end{aligned}$$

por lo que la expresión para la velocidad baricéntrica desde el punto de referencia de Eckart se encuentra dado por

$$U^{\ell}_{Eck} = \frac{R^{\ell}_{\nu}\left(m_{(1)}n_{(1)}U^{\nu}_{(1)} + m_{(2)}n_{(2)}U^{\nu}_{(2)}\right)}{m_{(1)}n_{(1)}\left\langle\gamma_{(v,1)}\right\rangle_{Eck} + m_{(2)}n_{(2)}\left\langle\gamma_{(v,2)}\right\rangle_{Eck}} = \frac{R^{\ell}_{\nu}\left(m_{(1)}n_{(1)}U^{\nu}_{(1)} + m_{(2)}n_{(2)}U^{\nu}_{(2)}\right)}{m_{(1)}n_{(1)} + m_{(2)}n_{(2)}}. \tag{4.44}$$

La ecuación (4.44) corresponde a la versión análoga de la ecuación (4.25) para el sistema de referencia de Eckart. Para establecer el tensor de energía-ímpetu se parte de la ecuación (4.31) usando los valores en los índices $A = \mu$ y $B = \nu$, obteniendo:

$$T^{\mu\nu} = m_1 \int V^{\mu}_{(1)} V^{\nu}_{(1)} f_{(1)} d^* V_{(1)} + m_2 \int V^{\mu}_{(2)} V^{\nu}_{(2)} f_{(2)} d^* V_{(2)} \tag{4.45}$$

Introduciendo la expresión (4.32) en la ecuación (4.45) se tiene

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = {} & U^{\mu}U^{\nu}\left(m_{(1)}\int \gamma^2_{(K,1)} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)}\int \gamma^2_{(K,2)} f_{(2)} d^* K_{(2)}\right) \qquad (4.46)\\ & + R^{\mu}_{\alpha} R^{\nu}_{\beta}\left(m_{(1)}n_{(1)}\left\langle K^{\alpha}_{(1)} K^{\beta}_{(2)}\right\rangle_{Eck} + m_{(2)}n_{(2)}\left\langle K^{\alpha}_{(2)} K^{\beta}_{(2)}\right\rangle_{Eck}\right)\\ & + U^{\mu} R^{\nu}_{\beta}\left(m_{(1)}\int \gamma_{(K,1)} K^{\beta}_{(1)} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)}\int \gamma_{(K,2)} K^{\beta}_{(2)} f_{(2)} d^* K_{(2)}\right)\\ & + U^{\nu} R^{\mu}_{\alpha}\left(m_{(1)}\int \gamma_{(K,1)} K^{\alpha}_{(1)} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)}\int \gamma_{(K,2)} K^{\alpha}_{(2)} f_{(2)} d^* K_{(2)}\right). \end{aligned}$$

Se usa la expresión (4.40) para simplificar la expresión del tensor de energía-ímpetu y evaluando las integrales se obtiene

$$T^{\mu\nu} = \tilde{\rho} U^{\mu} U^{\nu} + \tau^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} U^{\mu} q^{\nu} + \frac{1}{c^2} U^{\nu} q^{\mu}, \tag{4.47}$$

donde

$$\tilde{\rho} = m_{(1)} \int \gamma_{(K,1)}^2 f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} \int \gamma_{(K,2)}^2 f_{(2)} d^* K_{(2)} \tag{4.48}$$

es la densidad de masa-energía,

$$\tau^{\mu\nu} = R_{\alpha}^{\mu} R_{\beta}^{\nu} \left(m_{(1)} n_{(1)} \left\langle K_{(1)}^{\alpha} K_{(1)}^{\beta} \right\rangle_{Eck} + m_{(2)} n_{(2)} \left\langle K_{(2)}^{\alpha} K_{(2)}^{\beta} \right\rangle_{Eck} \right) \tag{4.49}$$

es el tensor de esfuerzo y

$$q^{\nu} = R_{\alpha}^{\nu} \left(m_{(1)} \int \gamma_{(K,1)} K_{(1)}^{\alpha} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} \int \gamma_{(K,2)} K_{(2)}^{\alpha} f_{(2)} d^* K_{(2)} \right) \tag{4.50}$$

es el flujo de calor. Las propiedades de la ecuación de calor y las implicaciones de esta expresión se discuten en la ref. [24].

En la siguiente sección se revisará y analizará el sistema de referencia de Landau-Lifshitz.

4.2.2. Marco de referencia de Landau-Lifshitz

Para obtener la expresión de la velocidad baricéntrica en el sistema de referencia de Landau-Lifshitz se parte de la componente espacial $T^{k\ell}$

$$T^{k\ell} = m_{(1)} \int f_{(1)} V_{(1)}^{k} V_{(1)}^{\ell} d^* V_{(1)} + m_{(2)} \int f_{(2)} V_{(2)}^{k} V_{(2)}^{\ell} d^* V_{(2)} \tag{4.51}$$

Introduciendo la descomposición de Eckart (4.32) en la ecuación (4.51) se tiene

$$\begin{aligned} T^{k\ell} = {} & U^k U^\ell \left(m_{(1)} \int \gamma_{(K,1)}^2 f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} \int \gamma_{(K,2)}^2 f_{(2)} d^* K_{(2)} \right) \\ & + R_{\alpha}^{k} R_{\beta}^{\ell} \left(m_{(1)} \int K_{(1)}^{\alpha} K_{(1)}^{\beta} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} \int K_{(2)}^{\alpha} K_{(2)}^{\beta} f_{(2)} d^* K_{(2)} \right) \\ & + U^k R_{\beta}^{\ell} \left(m_{(1)} n_{(1)} \int \gamma_{(k,1)} K_{(1)}^{\beta} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} n_{(2)} \int \gamma_{(k,2)} K_{(2)}^{\beta} f_{(2)} d^* K_{(2)} \right) \\ & + U^\ell R_{\alpha}^{k} \left(m_{(1)} n_{(1)} \int \gamma_{(k,1)} K_{(1)}^{\alpha} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} n_{(2)} \int \gamma_{(k,2)} K_{(2)}^{\alpha} f_{(2)} d^* K_{(2)} \right). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Es conveniente por notación introducir la definición de promedio estadístico en el sistema de referencia de Landau-Lifshitz

$$\left\langle \psi^a_{(i)} \right\rangle_{[\mathcal{LL}]} = \frac{1}{n_{(i)}} \int \gamma_{(K,i)} \psi^a_{(i)} f_{(i)} d^* V_{(i)}, \tag{4.53}$$

donde la velocidad hidrodinámica por especie (i) se encuentra dada por

$$U_{(i)} = \left\langle V^a_{(i)} \right\rangle_{[\mathcal{LL}]} = \frac{1}{n_{(i)}} \int \gamma_{(K,i)} \psi^a_{(i)} f_{(i)} d^* V_{(i)}. \tag{4.54}$$

Usando la definición de promedio estadístico en la ecuación (4.52) se tiene

$$\begin{aligned} T^{k\ell} = {} & U^k U^\ell \left(m_{(1)} \int \gamma^2_{(K,1)} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} \int \gamma^2_{(K,2)} f_{(2)} d^* K_{(2)} \right) \\ & + R^k_\alpha R^\ell_\beta \left(m_{(1)} \int K^\alpha_{(1)} K^\beta_{(1)} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} \int K^\alpha_{(2)} K^\beta_{(2)} f_{(2)} d^* K_{(2)} \right) \\ & + U^k R^\ell_\beta \left(m_{(1)} n_{(1)} \left\langle K^\beta_{(1)} \right\rangle_{[\mathcal{LL}]} + m_{(2)} n_{(2)} \left\langle K^\beta_{(2)} \right\rangle_{[\mathcal{LL}]} \right) \\ & + U^\ell R^k_\alpha \left(m_{(1)} n_{(1)} \left\langle K^\alpha_{(1)} \right\rangle_{[\mathcal{LL}]} + m_{(2)} n_{(2)} \left\langle K^\alpha_{(2)} \right\rangle_{[\mathcal{LL}]} \right). \end{aligned}$$

Si deseamos que los términos cruzados sean cero, se debe satisfacer la siguiente relación:

$$m_{(1)} n_{(1)} \left\langle K^\ell_{(1)} \right\rangle_{[\mathcal{LL}]} + m_{(2)} n_{(2)} \left\langle K^\ell_{(2)} \right\rangle_{[\mathcal{LL}]} = 0. \tag{4.55}$$

Introduciendo la expresión para la velocidad caótica (4.41) en la relación (4.55), se tiene la expresión para la velocidad baricéntrica en el sistema de referencia de Landau, dado por

$$U^\ell_{\mathcal{LL}} = \frac{R^\ell_\alpha \left(U^\alpha_{(1)} m_{(1)} n_{(1)} + U^\alpha_{(2)} m_{(2)} n_{(2)} \right)}{m_{(1)} \int \gamma^2_{(K,1)} f_{(1)} d^* K_{(1)} + m_{(2)} \int \gamma^2_{(K,2)} f_{(2)} d^* K_{(2)}}. \tag{4.56}$$

donde la energía interna por especie es:

$$\varepsilon_{(i)} = m_{(i)} c^2 \int \gamma^2_{(K,i)} f_{(i)} d^* K_{(i)} = n_{(i)} m_{(i)} \left(3 z_{(i)} + \frac{K_3\left(\frac{1}{z_{(i)}}\right)}{K_2\left(\frac{1}{z_{(i)}}\right)} \right). \tag{4.57}$$

Se puede observar que la velocidad baricéntrica no se obtiente usando el flujo de partículas como sucede en el sistema de referencia de Eckart.

Por otro lado, para establecer el flujo de partículas en el sistema de referencia de Landau, partiremos de la ecuación (4.34) e introduciendo la definición de promedio estadístico (4.53) se tiene

$$N^{\mu}_{(1)} + N^{\mu}_{(2)} = \left(n_{(1)}m_{(1)} + n_{(2)}m_{(2)}\right) U^{\mu} + J^{\mu}_{(1)} + J^{\mu}_{(2)}, \tag{4.58}$$

donde el flujo difusivo por especie se encuentra dado por

$$J^{\mu}_{(i)} = m_{(i)} R^{\mu}_{\alpha} \int \gamma_{(K,i)} K^{\alpha}_{(i)} f_{(i)} d^{*}K_{(i)}. \tag{4.59}$$

Se ha obtenido la expresión para la velocidad baricéntrica, el flujo de partículas y el tensor de energía-ímpetu para el sistema de referencia de Landau.

En la tabla 4.2 se muestra un cuadro comparativo entre el sistema de referencia de Eckart y de Landau-Lifshitz. Como se puede observar, la definición del promedio estadístico en ambos sistemas difiere únicamente por valor de $\gamma_{(K,i)}$, en consecuencia el cuadriflujo de partículas y el tensor de energía-ímpetu tienen ciertas diferencias. Para el sistema de referencia de Eckart [22], el cual es usado comunmente, el cuadriflujo de partículas está posicionado en la velocidad baricéntrica y el tensor de energía-ímpetu contiene el flujo de calor.

Por otro lado, para el sistema de referencia de Landau-Lifshitz el tensor de energía no contiene el calor, el cuadriflujo de partículas contiene un flujo difusivo y la velocidad baricéntrica involucra términos que contiene la energía interna del sistema.

Sistemas de referencia	***Eckart***	***Landau***
Promedio estadístico	$\left\langle K^a_{(i)} \right\rangle_{[Eck]} = \dfrac{1}{n_{(i)}} \int K^a_{(i)} f_{(i)} d^* K_{(i)}$	$\left\langle K^a_{(i)} \right\rangle_{[\mathcal{L}\mathcal{L}]} = \dfrac{1}{n_{(i)}} \int \gamma_{(K,i)} K^a_{(i)} f_{(i)} d^* K_{(i)}$
Velocidad baricéntrica	$U^\ell = \dfrac{\mathcal{R}^\ell_\mu \left(n_{(1)} m_{(1)} U^\mu_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)} U^\mu_{(2)} \right)}{n_{(1)} m_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)}}$	$U^\ell_{[\mathcal{L}\mathcal{L}]} = \dfrac{\mathcal{R}^\ell_\mu \left(n_{(1)} m_{(1)} U^\mu_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)} U^\mu_{(2)} \right)}{\frac{1}{c^2} \left(n_{(1)} \varepsilon_{(1)} + n_{(2)} \varepsilon_{(2)} \right)}$
Tensor de energía ímpetu	$T^{\mu\nu} = \tilde{\rho} U^\mu U^\nu + p h^{\mu\nu} + \dfrac{1}{c^2} U^\mu q^\nu + \dfrac{1}{c^2} U^\nu q^\mu$	$T^{\mu\nu} = \tilde{\rho} U^\mu_{[\mathcal{L}\mathcal{L}]} U^\nu_{[\mathcal{L}\mathcal{L}]} + p h^{\mu\nu}$
Cuadriflujo de partículas	$N^\mu = \left(n_{(1)} m_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)} \right) U^\mu$	$N^\mu = \left(n_{(1)} m_{(1)} + n_{(2)} m_{(2)} \right) U^\mu_{[\mathcal{L}\mathcal{L}]} + J^\mu_{(1)} + J^\mu_{(2)}$

Cuadro 4.2: Tabla comparativa de los sistemas de referencia relativistas: Eckart y Landau-Lifshitz

Capítulo 5

Reflexiones finales

En el presente trabajo se estudió el problema de un gas monocomponente cargado en presencia del campo electromagnético usando elementos de la teoría de Kaluza [25] y de la teoría cinética [6, 26, 7]. Dicho interés surge de la definición del flujo de corriente y de la relación del flujo con el potencial electromagnético debido a que en la literatura se supone estado estacionario para establecer la relación entre flujos y fuerzas termodinámicas [1, 13, 23]. En particular, para el caso de un sistema simple no relativista se recupera la ley de Ohm. Sin embargo, el suponer estado estacionario en la ecuación de Boltzmann implica que no se observen efectos ondulatorios en la dinámica del gas. Esto conlleva a que la velocidad de propagación de las ondas sea infinita, teniendo así problemas de causalidad.

En este trabajo de tesis se presentó una forma novedosa de atacar el problema suponiendo que el espacio-tiempo es curvo, lo que conlleva a que las fuerzas electromagnéticas son una consecuencia de la curvatura del espacio causada por cargas eléctricas. El potencial electromagnético A^ν se introduce como una quinta dimensión en el tensor métrico y la carga eléctrica q aparece en la quinta dimensión del espacio de velocidades. Al introducir dicha dimensión se demuestra que se recuperan las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de movimiento [27].

En el caso no relativista, la velocidad molecular se expresa como la suma de la velocidad hidrodinámica y la velocidad caótica. Para el caso relativista, existe una descomposición similar al caso no relativista, donde la velocidad molecular V^μ se representa como la suma de una componente paralela y perpendicular a U^μ. Dicha descomposición fue propuesta inicialmente por Eckart [8] y fue empleada de manerá expícita en términos de la velocidad caótica por

Struchtrup y por García-Perciante [16, 22]. Adicionalmente en el apéndice se demuestra que esta expresión es equivalente a usar la transformación de Lorentz en la velocidad caótica K^{μ}.

Siguiendo la metodología usual para el establecimiento de las ecuaciones de transporte en la teoría cinética, se obtuvieron las ecuaciones de balance en el régimen de Euler. En dicho régimen la ecuación de movimiento presenta una contribución del campo electromagnético y las ecuaciones restantes (balance de partículas y balance de ímpetu) no se ven afectadas por el formalismo pentadimensional. La ecuación de evolución de la velocidad hidrodinámica es primordial para el establecimiento de la función de distribución a primer orden en los gradientes. En equilibrio local, el valor del flujo de calor es cero y los efectos disipativos del flujo de partículas también son cero; sin embargo a primer orden dichos flujos no se cancelan. A partir del cálculo de la función de distribución a primer orden en los gradientes se obtuvo la contribución electromagnética para el flujo de calor y el flujo de partículas relacionando dichos flujos con sus respectivas fuerzas termodinámicas. Se estableció el límite no relativista recuperando la ley de Ohm [13] para el flujo de partículas y junto con el flujo de calor se obtuvo la relación de Wiedemann-Franz [23].

Finalmente, usando la teoría cinética se analizaron los sistemas de referencia de Eckart y Landau-Lifshitz para una mezcla binaria en el formalismo de Kaluza. La diferencia entre ambos sistemas se basa en la definición de la velocidad del centro de masas y el promedio estadístico. En el marco de referencia de Landau-Lifshitz, se observó que el flujo de calor no aparece en el tensor de energía-ímpetu, sin embargo aparece un flujo difusivo en el cuadriflujo de velocidades. En contraste con el marco de referencia de Eckart, donde el flujo de partículas no contiene flujos disipativos y el tensor de energía-ímpetu contiene el flujo de calor [14].

Este trabajo de tesis proporciona nuevos enfoques para atacar problemas teórios de interés en la teoría de transporte tales como establecer las ecuaciones de balance en el sistema de referencia de Landau-Lifshitz para mezclas, así como identificar los efectos disipativos y realizar un análisis en la producción de entropía. Una vez obtenidas estas relaciones se comparará con el sistema de referencia de Eckart. Por otra parte, se requiere el análisis de la ecuación $G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$ en los dos sistemas no incerciales.

Este trabajo teórico es un primer paso para comprender la dinámica de los plasmas en confinamiento a través el enfoque geométrico de la teoría general de relatividad. Estos experimentos son de gran interés debido a que se busca producir energías limpias. En los experimentos numéricos realizados para el confinamiento de los plasmas se estudian las inestabilidades y las fluctuaciones de los plasmas [28]. En el enfoque geométrico las fluctuaciones de los campos corresponden a las fluctuaciones de la métrica [29]. Esto sugiere la posibilidad de exportar las ideas de la relatividad general y de la geometría del espacio-tiempo en los problemas referentes al confinamiento de plasmas diluidos a altas temperaturas.

Apéndices

Apéndice A

Símbolos de Christoffel

La ecuación de movimiento

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{BL}\dot{x}^{B}\dot{x}^{L} = 0 \tag{A.1}$$

Los símbolos de Christoffel para la métrica (1.50) usada en este trabajo se encuentran dados por la ecuación (1.51). Debido a la estructura de la métrica, hay varios símbolos de Christoffel que son cero. A continuación se enlista todos estos términos:

$$\Gamma^{k}_{aB} = \Gamma^{k}_{4\mu} = \Gamma^{k}_{5\ell} = \Gamma^{k}_{55} = 0, \quad \Gamma^{4}_{k\ell} = \Gamma^{4}_{44} = \Gamma^{4}_{45} = \Gamma^{4}_{55} = 0, \quad \Gamma^{5}_{k\ell} = \Gamma^{5}_{44} = \Gamma^{5}_{45} = \Gamma^{5}_{54} = \Gamma^{5}_{55} = 0, \tag{A.2}$$

donde los índices minúsculas latinos (a, k, ℓ) van del 1 al 3, los griegos (μ) van del 1 al 4 y las letras mayúsculas (B) del 1 al 5. Los términos de Christoffel distintos de cero se enlistan a continuación:

$$\Gamma^{k}_{45} = \Gamma^{k}_{54} = \Gamma^{4}_{5\ell} = \Gamma^{4}_{\ell 5} = \Gamma^{5}_{4\ell} = \Gamma^{5}_{\ell 4} = -\frac{\xi\phi}{2c}. \tag{A.3}$$

Finalmente, los términos de segundo orden en el potencial electromagnético se desprecian en este trabajo, los cuales corresponden a:

$$\Gamma^{5}_{5\ell} = \Gamma^{4}_{\ell 4} = \frac{\xi^{2}\phi}{2c^{2}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\ell}}. \tag{A.4}$$

Apéndice B

Ecuaciones de conservación

Para el establecimiento de las ecuaciones de conservación se parte de la ecuación de Boltzmann para un gas monocomponente en el formalismo pentadimensional

$$V^A f_{,A} = J\left(ff'\right). \tag{B.1}$$

Se multiplica la ecuación anterior por el invariante colisional mV^A por ambos lados de la ecuación e integrando se tiene

$$m\int V^A V^B f_{,A} d^*V = 0. \tag{B.2}$$

Usando las propiedades de la derivada se puede expresar que el término $V^A V^B f_{,A}$ proviene de:

$$\left(V^A V^B f\right)_{;A} = V^A V^B f_{,A} + \left(V^A V^B\right)_{;A} f \tag{B.3}$$

Introduciendo la expresión (B.3) en la ecuación (B.2) se tiene

$$m\int V^A V^B f_{,A} d^*V = m\int \left(V^A V^B f\right)_{;A} d^*V - m\int f\left(V^A V^B\right)_{;A} \tag{B.4}$$

Desarrollando la derivada covariante del segundo término del lado derecho de la ecuación anterior y usando la expresión para la derivada total:

$$\left(V^A V^B\right)_{;A} = V^A_{;A} V^B + V^A V^B_{;A} = V^A_{;A} V^B + \dot{V}^B \tag{B.5}$$

Usando la ecuación de la trayectoria geodésica (1.43) del espacio tiempo curvo se tiene:

$$V^A_{;A} = \Gamma^A_{AL} V^L. \tag{B.6}$$

Por lo tanto, la ecuación (B.2) queda de la forma

$$m \int V^A V^B f_{,A} d^* V = m \left(\int V^A V^B f d^* V \right)_{;A} \tag{B.7}$$

Apéndice C

Notación para constantes y magnitudes físicas

Símbolo	Significado
No Relativista	
$\vec{r}$	vector de posición
$\vec{v}$	vector de velocidad molecular
$f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$	función de distribución
$\phi = \phi(\vec{r}, t)$	potencial eléctrico
$J(f, f')$	Kernel colisional
n	densidad de partículas
$\vec{J}$	flujo de carga o corriente
μ	parámetro de Knudsen
τ	tiempo de relajación característico
q	carga
T	temperatura
$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$	velocidad hidrodinámica
$f^{(0)}$	función de distribución en equilibrio
$f^{(1)}$	función de distribución a primer orden en los gradientes
f_{NR}	función de distribución Maxwell-Boltzmann
p	presión

k_B	constante de Boltzmann
$\vec{c}$	velocidad caótica
m	masa
$\vec{E}$	campo eléctrico
σ	conductividad eléctrica
Relativista	
V^{μ}	cuadriflujo de la velocidad molecular
$\gamma_{(v)}$	factor de Lorentz
c	velocidad de la luz
f_{RE}	función de distribución de JÃŒttner
U^{β}	velocidad hidrodinámica
$\mathcal{K}_n\left(\frac{1}{z}\right)$	función de Bessel modificada de segundo tipo de orden n
N^{μ}	cuadriflujo de partículas
$T^{\mu\nu}$	tensor de ímpetu-energía
$\pi^{\mu\nu}$	tensor de Navier
q^{μ}	flujo de calor
$h^{\mu\nu}$	proyector espacial
$\eta^{\mu\nu}$	métrica de Minkowski
ε	energía interna
$\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}$	símbolo de Christoffel de segunda especie
$g^{\mu\nu}$	métrica del espacio-tiempo
τ_M	tiempo propio de Minkowski
ξ	constante de acoplamiento
G	constante gravitacional
ϵ_0	constante dieléctrica
A_{ℓ}	potencial electromagnético
F^{μ}_{β}	tensor de Faraday
$\vec{B}$	campo magnético
$\mathcal{L}^{\alpha}_{\nu}$	transformación de Lorentz
K^{ν}	velocidad caótica

$f^{(1)}_{[EM]}$	contribución electromagnética de $f^{(1)}$
$J^{\nu}_{[EM]}$	contribución electromagnética de la densisdad de corriente
$\mathcal{G}(\frac{1}{z})$	cociente $\mathcal{K}_3(^1/_z)/\mathcal{K}_2(^1/_z)$
ϕ^{ℓ}	potencial electroestático
$J^{\nu}_{[Q,EM]}$	contribución electromagnética del flujo de calor
$\mathcal{U}^{\mu}$	velocidad hidrodinámica
S^{μ}	cuadriflujo de entropía
σ_s	producción de entropía
Mezclas binarias	
$[]_{(i)}$	notación para indicar que es para la especie (i)
$\vec{u}$	vector de la velocidad baricéntrica
$\vec{u}_{(i)}$	vector de la velocidad hidrodinámica
$\vec{J}_{(i)}$	flujo difusivo por especie

Apéndice D

Integrales útiles para el cálculo de funciones termodinámicas de fluidos relativistas

Tabla de integrales útiles para el cálculo de fluidos relativistas

$$f^{(0)} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \tag{D.1}$$

$$\int \vec{c} f^{(0)} d\vec{c} = 0 \tag{D.2}$$

$$\int_1^\infty \left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = z\mathcal{K}_1\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.3}$$

$$\int_1^\infty \gamma \left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = z\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.4}$$

$$\int_1^\infty \gamma^2 \left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = z\mathcal{K}_1\left(\frac{1}{z}\right) + 3z^2\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.5}$$

$$\int_1^\infty \gamma^3 \left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = z\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right) + 3z^2\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.6}$$

$$\int_1^\infty \gamma^4 \left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 2z^2 \mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right) + z\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) + 15z^3\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.7}$$

$$\int_1^\infty \gamma^5 \left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = z\mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) + 15z^3\mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.8}$$

******

$$\int_1^\infty \left(\gamma^2 - 1\right)^{3/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 3z^2\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.9}$$

$$\int_1^\infty \gamma \left(\gamma^2 - 1\right)^{3/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 3z^2\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.10}$$

$$\int_1^\infty \gamma^2 \left(\gamma^2 - 1\right)^{3/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 3z^2\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z}\right) + 15z^3\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.11}$$

$$\int_1^\infty \gamma^3 \left(\gamma^2 - 1\right)^{3/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 3z^2\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) + 15z^3\mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.12}$$

$$\int_1^\infty \gamma^4 \left(\gamma^2 - 1\right)^{3/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 12z^3\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) + 3z^2\mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) + 105z^4\mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.13}$$

****

$$\int_1^\infty \left(\gamma^2 - 1\right)^{5/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 15z^3\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.14}$$

$$\int_1^\infty \gamma \left(\gamma^2 - 1\right)^{5/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 15z^3\mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.15}$$

$$\int_1^\infty \gamma^2 \left(\gamma^2 - 1\right)^{5/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 15z^3\mathcal{K}_3\left(\frac{1}{z}\right) + 105z^4\mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.16}$$

$$\int_1^\infty \gamma^3 \left(\gamma^2 - 1\right)^{5/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 15z^3\mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) + 105z^4\mathcal{K}_5\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.17}$$

$$\int_1^\infty \gamma^4 \left(\gamma^2 - 1\right)^{5/2} e^{-\frac{\gamma}{z}} d\gamma = 90 z^4 \mathcal{K}_4\left(\frac{1}{z}\right) + 15 z^3 \mathcal{K}_5\left(\frac{1}{z}\right) + 945 z^5 \mathcal{K}_5\left(\frac{1}{z}\right) \tag{D.18}$$

Apéndice E

Expresión de la velocidad molecular en términos de la velocidad caótica por medio de la descomposición de Eckart García-Perciante

En este apéndice se demostrará la igualdad de la expresión (2.15) introducida inicialmente por los autores A. L. García-Perciante, A. Sandoval-Villalbazo y L. García-Colín Scherer en [16, 30]. Para ello se usará la transformación de Lorentz, dicha transformación es usada en relatividad especial.

Para pasar a un sistema inercial de referencia S', con coordenadas $X' = (x', y', z', ct')$ que se mueve con una cuadrivelociad relativa $U^{\mu} = \gamma_{(u)} [U_x, U_y, U_z, c]$ respecto del sistema inercial de referencia S con coordenadas $X = (x, y, z, ct)$, las coordendas en ambos sistemas de referencia se encuentran relacionadas por las expresiones:

$$x' = \frac{x - Ut}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \qquad y' = \frac{y - Ut}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \qquad z' = \frac{z - Ut}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{U}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \tag{E.1}$$

Las relaciones (E.1) se pueden expresar como la transformación $X'^{\mu} = \mathcal{L}^{\mu\nu} X_{\nu}$ donde $\mathcal{L}^{\mu\nu}$ es denominada la matriz de Lorentz, dada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_x^2}{c^2} & \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_xU_y}{c^2} & \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_xU_z}{c^2} & \frac{U_x}{c} \\ \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_xU_y}{c^2} & 1+\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_y^2}{c^2} & \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_yU_z}{c^2} & \frac{U_y}{c} \\ \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_xU_z}{c^2} & \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_yU_z}{c^2} & 1+\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{U_z^2}{c^2} & \frac{U_z}{c} \\ \frac{U_x}{c} & \frac{U_y}{c} & \frac{U_z}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}, \tag{E.2}$$

donde γ es llamado el factor de Lorentz. Sea V^μ la cuadrivelocidad molecular y K^ν el cuadrivector de la velocidad caótica cuyas coordenadas son $\left[K_x, K_y, K_z, \gamma_{(k)}c\right]$ se cumple la siguiente igualdad.

$$V^\mu = \mathcal{L}^{\mu\nu}K_\nu = \gamma_{(k)}U^\mu + h^\mu_\alpha \mathcal{L}^{\alpha\nu}K_\nu. \tag{E.3}$$

Reescribiendo la expresión (E.3) de manera matricial se tiene

$$V^\mu = \mathcal{L}^{\mu\nu}K_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{(k)}U_x \\ \gamma_{(k)}U_y \\ \gamma_{(k)}U_x \\ \gamma_{(k)}\gamma c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{U_x^2}{(1+\gamma)}\frac{K_x}{c^2} + \frac{U_xU_y}{(1+\gamma)}\frac{K_y}{c^2} + \frac{U_xU_z}{(1+\gamma)}\frac{K_y}{c^2} \\ \frac{U_xU_y}{(1+\gamma)}\frac{K_x}{c^2} + \frac{U_y^2}{(1+\gamma)}\frac{K_y}{c^2} + \frac{U_yU_z}{(1+\gamma)}\frac{K_z}{c^2} \\ \frac{U_xU_z}{(1+\gamma)}\frac{K_x}{c^2} + \frac{U_yU_z}{(1+\gamma)}\frac{K_y}{c^2} + \frac{U_z^2}{(1+\gamma)}\frac{K_z}{c^2} \\ \frac{K_xU_x}{c} + \frac{K_yU_y}{c} + \frac{K_zU_z}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \\ 0 \end{pmatrix} \tag{E.4}$$

$$= \gamma_{(k)}U^\mu + h^\mu_\alpha \mathcal{L}^{\alpha\nu}K_\nu \tag{E.5}$$

Expresando de manera matricial el proyector espacial (1.40) se tiene

$$h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1+\frac{U_x^2}{c^2} & \frac{U_xU_y}{c^2} & \frac{U_xU_z}{c^2} & -\frac{\gamma U_x}{c} \\ \frac{U_yU_x}{c^2} & 1+\frac{U_y^2}{c^2} & \frac{U_yU_z}{c^2} & -\frac{\gamma U_y}{c} \\ \frac{U_zU_x}{c^2} & \frac{U_zU_y}{c^2} & 1+\frac{U_z^2}{c^2} & -\frac{\gamma U_z}{c} \\ \frac{\gamma U_x}{c} & \frac{\gamma U_y}{c} & \frac{\gamma U_z}{c} & 1-\gamma^2 \end{pmatrix} \tag{E.6}$$

La demostración de la igualdad se hará únicamente para la componente temporal ($\mu = 4$), el proceso es similar para las componentes espaciales ($\mu = 1, 2, 3$). Por lo tanto, la componente temporal de la cuadrivelocidad se encuentra dada por

$$
\begin{aligned}
V^4 &= \gamma_K U^4 + h^4_\alpha \mathcal{L}^\alpha_\nu K^\nu \\
&= \gamma_K U^4 + h^4_1 \mathcal{L}^1_\nu K^\nu + h^4_2 \mathcal{L}^2_\nu K^\nu + h^4_3 \mathcal{L}^3_\nu K^\nu + h^4_4 L^4_\nu K^\nu \\
&= \gamma_K U^4 + \frac{U_x \gamma}{c}\left(\mathcal{L}^1_\nu K^\nu\right) + \frac{U_y \gamma}{c}\left(\mathcal{L}^2_\nu K^\nu\right) + \frac{U_z \gamma}{c}\left(\mathcal{L}^3_\nu K^\nu\right) + \left(1-\gamma^2\right)\left(\mathcal{L}^4_\nu K^\nu\right) \\
&= \gamma_K U^4 + \frac{U_x \gamma}{c}\left[(1+)\right] \\
&+ \frac{U_y \gamma}{c}\left(\mathcal{L}^2_\nu K^\nu\right) + \frac{U_z \gamma}{c}\left(\mathcal{L}^3_\nu K^\nu\right) + \left(1-\gamma^2\right)\left(\mathcal{L}^4_\nu K^\nu\right)
\end{aligned}
$$

Aplicando la transformación de Lorentz para la expresión anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
V^4 = & \frac{K_x U_x}{c}\left[\frac{\gamma U_y^2}{c^2(\gamma+1)} + \frac{\gamma U_z^2}{c^2(\gamma+1)} + \left(1-\gamma^2\right) + \gamma\left(1 + \frac{U_x^2}{c^2(\gamma+1)}\right)\right] + && \text{(E.7)} \\
& \frac{K_y U_y}{c}\left[\frac{\gamma U_x^2}{c^2(\gamma+1)} + \frac{\gamma U_z^2}{c^2(\gamma+1)} + \left(1-\gamma^2\right) + \gamma\left(1 + \frac{U_y^2}{c^2(\gamma+1)}\right)\right] + && \text{(E.8)} \\
& \frac{K_z U_z}{c}\left[\frac{\gamma U_x^2}{c^2(\gamma+1)} + \frac{\gamma U_y^2}{c^2(\gamma+1)} + \left(1-\gamma^2\right) + \gamma\left(1 + \frac{U_z^2}{c^2(\gamma+1)}\right)\right] + && \text{(E.9)} \\
& \frac{\gamma\gamma_{(k)}}{c}\left[U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 - c^2 - \gamma^2 c^2\right] && \text{(E.10)}
\end{aligned}
$$

Para simplificar los términos (E.7,E.8, E.9) es suficiente con simplifcar sólo uno de ellos, ya que el proceso es equivalente. Usando la relación $\beta^2 = \frac{U_x^2+U_y^2+U_z^2}{c^2}$ y $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma U_y^2}{c^2(\gamma+1)} + \frac{\gamma U_z^2}{c^2(\gamma+1)} + \left(1-\gamma^2\right) + \gamma\left(1 + \frac{U_x^2}{c^2(\gamma+1)}\right) &= \\
1 + \gamma\left(1 - \gamma + \frac{U_x^2}{c^2(\gamma+1)} + \frac{U_y^2}{c^2(\gamma+1)} + \frac{U_z^2}{c^2(\gamma+1)}\right) &= \\
1 + \gamma\left(1 - \gamma + \frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma+1}\right) &= \\
1 + \gamma\left(1 - \gamma + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma+1}\right) &= 1
\end{aligned}
$$

Adicionalmente, para el término (E.10)

$$U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 + c^2 - c^2\gamma^2 = \left(-c^2 + c^2\gamma^2\right) + c^2 - c^2\gamma^2 = 0 \tag{E.11}$$

Por lo tanto, se cumple la expresión

$$V^4 = \gamma_{(k)}U^4 + \frac{K_x U_x}{c} + \frac{K_y U_z}{c} + \frac{K_z U_z}{c} = \gamma_k U^4 + h^4_\alpha \mathcal{L}^\alpha_\nu K^\nu \tag{E.12}$$

Bibliografía

[1] L. Spitzer, *Physics of Fully Ionized Gases: Second Revised Edition*. Dover Books on Physics, Dover Publications, 2013.

[2] R. Goldston and P. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*. CRC Press, 1995.

[3] P. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2008.

[4] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, vol. 1. Wiley New York, 1972.

[5] S. Chapman and T. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1970.

[6] A. R. Sagaceta-Mejía and A. Sandoval-Villalbazo, "On the statistical foundations of kaluza's magnetohydrodynamics," in *American Institute of Physics Conference Series*, vol. 1786, 2016.

[7] A. R. Sagaceta-Mejía, A. Sandoval-Villalbazo, and A. L. García-Perciante, "Thermoelectric and thermomagnetic effects in kaluza's kinetic theory," *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 42, no. 4, pp. 387–395, 2017.

[8] C. Eckart, "The thermodynamics of irreversible processes. iii. relativistic theory of the simple fluid," *Physical Review*, vol. 58, no. 10, p. 919, 1940.

[9] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. No. v. 6, Elsevier Science, 2013.

[10] L. Scherer, *Teoría cinética de los gases*. Colección CBI, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, 1990.

[11] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, "A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems," *Phys. Rev.*, vol. 94, pp. 511–525, May 1954.

[12] R. E. Peierls, "Quantum theory of solids," in *Ecole dÉté de Physique Théorique Les Houches, France, August 1953*.

[13] J. McKelvey, *Solid State and Semiconductor Physics*. Harper International Edition, Krieger Publishing Company, 1966.

[14] C. Cercignani and G. M. Kremer, "Relativistic boltzmann equation," in *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, pp. 31–63, Springer, 2002.

[15] R. L. Liboff, *Kinetic theory: classical, quantum, and relativistic descriptions*. Springer Science & Business Media, 2003.

[16] A. L. García-Perciante, A. Sandoval-Villalbazo, and L. García-Colín, "On the microscopic nature of dissipative effects in special relativistic kinetic theory," *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 37, no. 1, pp. 43–61, 2012.

[17] H. Stephani, *Relativity: An introduction to special and general relativity*. Cambridge university press, 2004.

[18] D. Brun-Battistini, A. Sandoval-Villalbazo, and A. L. García-Perciante, "Entropy production in simple special relativistic fluids," *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 39(1), pp. 27–33, 2014.

[19] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. New York, NY: Wiley, 3rd ed. ed., 1999.

[20] L. Scherer and P. Menache, *La física de los procesos irreversibles*. El Colegio Nacional, 2003.

[21] A. L. García-Perciante and A. R. Mendez, "Heat conduction in relativistic neutral gases revisited," *General Relativity and Gravitation*, vol. 43, no. 8, pp. 2257–2275, 2011.

[22] H. Struchtrup, "Projected moments in relativistic kinetic theory," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 253, no. 1, pp. 555–593, 1998.

[23] C. Kittel, *Introduction to solid state.* John Wiley & Sons, 1966.

[24] M. Smerlak, "On the inertia of heat," *The European Physical Journal Plus*, vol. 127, p. 72, Jul 2012.

[25] T. Kaluza, "Zum unitätsproblem der physik," *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss.*, pp. 966–972, 1921.

[26] A. Sandoval-Villalbazo, A. R. Sagaceta-Mejía, and A. L. García-Perciante, "On the kinetic foundations of kaluza's magnetohydrodynamics," *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 40, no. 2, pp. 93–101, 2015.

[27] T. Appelquist, A. Chodos, and P. G. O. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories*, vol. 65. Addison-Wesley, 1987.

[28] M. Kotschenreuther, W. Dorland, M. Beer, and G. Hammett, "Quantitative predictions of tokamak energy confinement from first-principles simulations with kinetic effects," *Physics of Plasmas*, vol. 2, no. 6, pp. 2381–2389, 1995.

[29] D. Brun-Battistini, A. L. Garcia-Perciante, and A. Sandoval-Villalbazo, "Heat flux in the presence of a gravitational field in a simple dilute fluid: an approach based in general relativistic kinetic theory to first order in the gradients," *Entropy*, vol. 19, p. 537, 2017.

[30] A. Sandoval-Villalbazo and L. García-Colín, "The relativistic kinetic formalism revisited," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 278, no. 3, pp. 428 – 439, 2000.